INSPECTION DES LYCEES
D'ENSEIGNEMENT GENERAL ZONE 1
(Brazzaville-Pool)
Ilegz1bzpool@gmail.com

Année-scolaire : 2022-2023

Composition du 2ᵉ Trimestre

Niveau : Terminale | Série : D

Epreuve : Mathématiques | Durée : 4Heures

Exercice 1 : (05 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$. On donne les points A, B, C et P d'affixes respectives : $Z_A = \frac{3}{2} + 6i$; $Z_B = \frac{3}{2} - 6i$; $Z_C = -3 - \frac{1}{4}i$ et $Z_P = 3 + 2i$.
$\vec{W}$ est le vecteur d'affixe $Z_{\vec{W}} = -1 + \frac{5}{2}i$.

1. a) Déterminer l'affixe Z_Q du point Q image du point B par la translation T de vecteur $\vec{W}$. (0,5pt)
   b) Déterminer l'affixe Z_R du point R image du point P par l'homothétie H de centre C et de rapport à $-\frac{1}{3}$. (0,5pt)
2. a) Déterminer l'affixe Z_S du point S image du point P par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. (0,5pt)
   b) Placer les points P, Q, R et S. (1pt)
3. a) Démontrer que le quadrilatère $PQRS$ est un parallélogramme. (0,5pt)
   b) Calculer le rapport : $\frac{Z_R - Z_Q}{Z_P - Z_Q}$. (0,5pt)
   c) En déduire la nature exacte du quadrilatère $PQRS$. (0,5pt)
4. Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle C. (0,5pt)
5. Démontrer l'expression analytique de la similitude plane directe de centre A, de rapport $\frac{1}{3}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. (0,5pt)

Exercice 2 : (05 points)

E est un espace vectoriel muni d'un base canonique $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère l'endomorphisme f de E définie par :

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

1. a) Donner la matrice de f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (0,5pt)
   b) Déterminer $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$ en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$. (1pt)
2. a) Déterminer le noyau de f. (0,5pt)
   b) Déterminer l'image de f notée $I_m f$. (0,5pt)

b) Déterminer $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$ en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$. (1pt)

2. a) Déterminer le noyau de f. (0,5pt)

   b) Déterminer l'image de f notée $I_m f$. (0,5pt)

3. Soit g la symétrie vectorielle de base $B = \{\,\vec{u} \in E/2x - y = 0\}$ et de direction $D = \{\,\vec{u} \in E/x + 2y = 0\}$
   a) Déterminer $g(\vec{\imath})$ et $g(\vec{\jmath})$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (1pt)
   b) Déterminer l'expression analytique de g. (0,5pt)
4. On donne les vecteurs $\vec{u} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.
   a) Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de E. (0,5pt)
   b) Donner la matrice de g dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$. (0,5pt)

Exercice 3 : (07 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - x)e^{-x} + x$.
Soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. (1pt)
2. a) Montrer que $f'(x) = g(x)e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, où $g(x) = e^x - x^2 + 3x - 1$. (0,5pt)
   On admet que $\forall x \in \mathbb{R}, g(0) = 0$ et $g(x) \leq 0$ si $x \in]-\infty; 0[$ et $g(x) \geq 0$ si $x \in]0; +\infty[$.
   b) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$. (0,5pt)
   c) Dresser e tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$. (0,5pt)
3. a) Montrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$. (0,5pt)
   b) Etudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite D. (0,5pt)
   c) Montrer que $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$. (0,5pt)
4. Construire la courbe $\mathcal{C}$ et la droite D dans le même repère. (1pt)
5. On considère la suite numérique (U_n) définie par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout entier naturel n.
   a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq 1$. (0,5pt)
   b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante. (0,5pt)
   c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite. (1pt)

Exercice 4 : (03 points)

Une urne contient huit boules : 3 boules rouges, 3 boules vertes et deux boules blanches (indiscernables au toucher).
On tire au hasard, successivement et sans remise, deux boules de l'urne.

1. On considère les événements suivants :
   A : " obtenir au moins une boule blanche ".
   B : " obtenir deux boules de la même couleur ".
   Montrer que : $P(A) = \frac{13}{28}$ et $P(B) = \frac{1}{4}$. (1pt)
2. Soit X la variable aléatoire associée au nombre de boules blanches tirées.
   a) Montrer que $P(X = 2) = \frac{1}{28}$. (0,5pt)
   b) Déterminer la loi de probabilité de X. (1pt)
   c) Calculer l'espérance mathématique. (0,5pt)

INSPECTION DES LYCÉES
D'ENSEIGNEMENT GÉNÉRAL ZONE 1
(BRAZZAVILLE - POOL)
Inspectlycée@hagoo.fr
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ANNÉE SCOLAIRE 2022-2023

CORRIGÉ DE LA COMPOSITION ZONALE DU DEUXIÈME TRIMESTRE
ÉPREUVE DE : MATHÉMATIQUES
NIVEAU : TERMINALE D　　DURÉE : 4 HEURES　　COEFFICIENT : 4

Exercice 1 : (5 points)

On donne : $z_A = \frac{3}{2} + 6i$; $z_B = \frac{3}{2} - 6i$; $z_C = -3 - \frac{1}{4}i$; $z_P = 3 + 2i$ et $z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}i$.

1. a) **Déterminons l'affixe z_Q du point Q image du point B par la translation de vecteur $\vec{w}$.**

On a : $z' = z + z_{\vec{w}} \Longrightarrow z_Q = z_B + z_{\vec{w}}$

$z_Q = \frac{3}{2} - 6i - 1 + \frac{5}{2}i \Longrightarrow z_Q = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i$.

D'où $\boxed{z_Q = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i}$ **(0,5 point)**

b) **Déterminons l'affixe z_R du point R image du point P par la l'homothétie de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$.**

On a : $z' = kz + (1-k)z_\Omega \Longrightarrow z' = -\frac{1}{3}z + \frac{4}{3}z_C$.

$z_R = -\frac{1}{3}z_P + \frac{4}{3}z_C \Longrightarrow z_R = -\frac{1}{3}(3+2i) + \frac{4}{3}\left(-3 - \frac{1}{4}i\right) = -1 - \frac{2}{3}i - 4 - \frac{1}{3}i$

D'où $\boxed{z_R = -5 - i}$ **(0,5 point)**

2. a) **Déterminons l'affixe z_S du point S image du point P par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.**

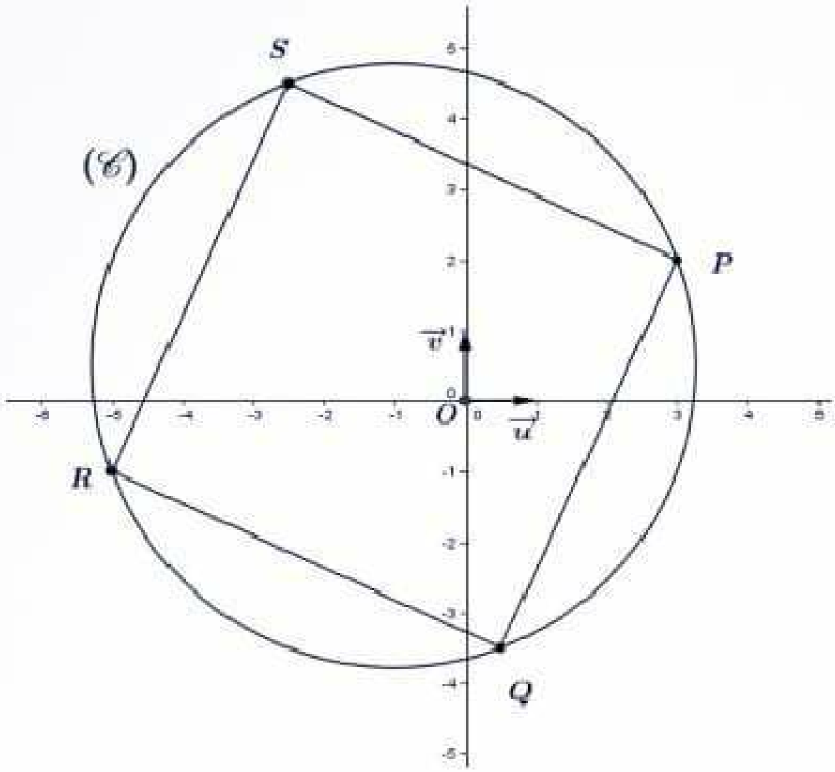
On a : $z' = e^{i\alpha}z + (1 - e^{i\alpha})z_\Omega \Longrightarrow z' = e^{-\frac{\pi}{2}i}z + (1 - e^{-\frac{\pi}{2}i})z_A$.

$z_S = -iz_P + (1+i)z_A \Longrightarrow z_S = -i(3+2i) + (1+i)\left(\frac{3}{2} + 6i\right)$

$z_S = 2 - 3i + \frac{3}{2} + 6i + \frac{3}{2}i - 6 = -\frac{5}{2} + \frac{9}{2}i$.

D'où $\boxed{z_S = -\frac{5}{2} + \frac{9}{2}i}$ **(0,5 point)**

b) **Plaçons les points P, Q, R et S.**



(1 point)

3. a) **Démontrons que le quadrilatère $PQRS$ est un parallélogramme.**

$PQRS$ est un parallélogramme $\Longleftrightarrow z_Q - z_P = z_R - z_S$.

$z_Q - z_P = \dfrac{1}{2} - \dfrac{7}{2}i - 3 - 2i = -\dfrac{5}{2} - \dfrac{11}{2}i$ et $z_R - z_S = -5 - i + \dfrac{5}{2} - \dfrac{9}{2}i = -\dfrac{5}{2} - \dfrac{11}{2}i$

Comme $z_Q - z_P = z_R - z_S$, alors $PQRS$ est un parallélogramme. **(0,5 point)**

b) **Calculons le rapport $\dfrac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$.**

$$\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q} = \frac{-5 - i - \frac{1}{2} + \frac{7}{2}i}{3 + 2i - \frac{1}{2} + \frac{7}{2}i} = \frac{\frac{1}{2}(-11 + 5i)}{\frac{1}{2}(5 + 11i)} \Longrightarrow \frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q} = \frac{i(5 + 11i)}{5 + 11i} = i$$

D'où $\boxed{\dfrac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q} = i}$ **(0,5 point)**

c) **Déduisons-en la nature exacte du quadrilatère $PQRS$.**

Étant donné que $PQRS$ est un parallélogramme et RQP est un triangle rectangle isocèle en Q, alors $PQRS$ est un carré. **(0,5 point)**

4. **Justifions que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle $(\mathscr{C})$.**

Comme $PQRS$ est un carré, alors les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle $(\mathscr{C})$. **(0,5 point)**

5. **Déterminons l'expression analytique de la similitude plane directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{3}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.**

$$S : \begin{cases} x' = k(x - x_A)\cos\theta - k(y - y_A)\sin\theta + x_A \\ y' = k(x - x_A)\sin\theta + k(y - y_A)\cos\theta + y_A \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{3}(y - 6)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{2} \\ y' = \frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3}(y - 6)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{3}y - 2 + \frac{3}{2} \\ y' = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2} + 6 \end{cases}$$

D'où $\boxed{\begin{cases} x' = \frac{1}{3}y - \frac{1}{2} \\ y' = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{2} \end{cases}}$ **(0,5 point)**

Exercice 2 : (5 points)

On donne : $f : \begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -x + \dfrac{1}{2}y \end{cases}$

1. a) **Donnons la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.**

$\boxed{M_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}}$ **(0,5 point)**

b) **Déterminons $f(\overrightarrow{i})$ et $f(\overrightarrow{j})$.**

$\boxed{f(\overrightarrow{i}) = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} \text{ et } f(\overrightarrow{j}) = -\overrightarrow{i} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{j}}$ **(1 point)**

2. a) **Déterminons le noyau de f.**

On a : $Kerf = \left\{\overrightarrow{u} \in E / f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}\right\}$

Posons $x' = 0$ et $y' = 0$

$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + \dfrac{1}{2}y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Longrightarrow 2x - y = 0$

D'où le noyau de f est une droite vectorielle d'équation $2x - y = 0$ engendrée par $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$. **(0,5 point)**

b) **Déterminons l'image de f.**

On a : $Imf = \left\{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}') \in E^2 / f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}'\right\}$

$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -x + \dfrac{1}{2}y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x' = 2x - y \\ 2y' = -x + y \end{cases} \Longrightarrow x' + 2y' = 0.$

D'où l'image de f est une droite vectorielle d'équation $x + 2y = 0$ engendrée par $\overrightarrow{e_2} = -2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$. **(0,5 point)**

3. On donne : $B = \left\{\overrightarrow{u} \in E / 2x - y = 0\right\}$ et $B = \left\{\overrightarrow{u} \in E / x + 2y = 0\right\}$

a) **Déterminons $g(\overrightarrow{i})$ et $g(\overrightarrow{j})$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.**

Soit $\overrightarrow{e_1} \in B \Longrightarrow g(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2} \in D \Longrightarrow g(\overrightarrow{e_2}) = -\overrightarrow{e_2}$ avec $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{e_2} = -2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.

$\begin{cases} g(\overrightarrow{i}) + 2g(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} \\ -2g(\overrightarrow{i}) + g(\overrightarrow{j}) = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} g(\overrightarrow{i}) + 2g(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} \quad (1) \\ 4g(\overrightarrow{i}) - 2g(\overrightarrow{j}) = -4\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} \quad (2) \end{cases}$

$(1) + (2) : 5g(\overrightarrow{i}) = -3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} \Longrightarrow g(\overrightarrow{i}) = -\dfrac{3}{5}\overrightarrow{i} + \dfrac{4}{5}\overrightarrow{j} \quad (3)$

(3) dans (1) : $-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{i} + \dfrac{4}{5} + 2g(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} \Longrightarrow -3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + 10g(\overrightarrow{j}) = 5\overrightarrow{i} + 10\overrightarrow{j}$

$10g(\overrightarrow{i}) = 5\overrightarrow{i} + 10\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} \Longrightarrow 10g(\overrightarrow{j}) = 8\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j}$

$g(\overrightarrow{j}) = \dfrac{8}{10}\overrightarrow{i} + \dfrac{6}{10}\overrightarrow{j} \Longrightarrow g(\overrightarrow{j}) = \dfrac{4}{5}\overrightarrow{i} + \dfrac{3}{5}\overrightarrow{j}$.

D'où $\boxed{g(\overrightarrow{i}) = -\frac{3}{5}\overrightarrow{i} + \frac{4}{5}\overrightarrow{j} \text{ et } g(\overrightarrow{j}) = \frac{4}{5}\overrightarrow{i} + \frac{3}{5}\overrightarrow{j}}$ **(1 point)**

b) **Déterminons l'expression analytique de g.**
Soit $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{u}' = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}$ deux vecteurs de E tels que $g(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}'$.
$x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} = xg(\overrightarrow{i}) + yg(\overrightarrow{j})$
$x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} = \left(-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y\right)\overrightarrow{j}$.
Par identification, on a : $x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y$ et $y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y$

D'où $\boxed{\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{cases}}$ **(0,5 point)**

4. On donne $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = -2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.

a) **Montrons que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de E.**
$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de E si et seulement si $det_{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})} \neq 0$.
$det_{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})} = 1 + 2 \Longrightarrow det_{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})} = 3$.
Comme $det_{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})} \neq 0$, alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de E. **(0,5 point)**

b) **Donnons la matrice de g dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.**
Comme $\overrightarrow{u} \in B$ et $\overrightarrow{v} \in D$, alors on a : $g(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ et $g(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$.

D'où $\boxed{M_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$ **(0,5 point)**

Exercice 3 : (7 points)
On donne $f(x) = (x^2 - x)e^{-x} + x$ et $E_f =]-\infty; +\infty[$.

1. **Calculons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.**
► **Limite de f en $-\infty$.**
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} [x[(x-1)e^{-x} + 1] = +\infty$
D'où $\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$ **(0,5 point)**
► **Limite de f en $+\infty$.**
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} [(x^2 - x)e^{-x} + x] = +\infty$
D'où $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$ **(0,5 point)**

2. a) **Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)e^{-x}$.**
$f(x) = (x^2 - x)e^{-x} + x \Longrightarrow f'(x) = (2x - 1)e^{-x} - (x^2 - x)e^{-x} + 1$
$f'(x) = (2x - 1)e^{-x} - (x^2 - x)e^{-x} + e^{-x} \times e^{x}$
$f'(x) = (3x - x^2 - 1 + e^{x})e^{-x}$, or $g(x) = e^{x} - x^2 + 3x - 1$.
D'où $\boxed{f'(x) = e^{-x}g(x)}$ **(0,5 point)**

b) **Déduisons-en le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.**
$f'(x) = e^{-x}g(x)$; pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

▶ Pour tout $x \in]-\infty; 0[$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante. **(0,25 point)**

▶ Pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante. **(0,25 point)**

c) **Dressons le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(0,5 point)

3. a) **Montrons que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.**

$(\mathscr{D})$ est une asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} [f(x) - y] = 0$.

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \longrightarrow +\infty} (x^2 - x)\mathrm{e}^{-x} = 0$$

D'où $(\mathscr{D})$ est une asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$. **(0,5 point)**

b) **Étudions la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $(\mathscr{D})$.**

▶ **Signe de $f(x) - y$.**

Posons $f(x) - y = 0$

▶ **Tableau de signe.**

$(x^2 - x)\mathrm{e}^{-x} = 0 \Longrightarrow x = 0$ ou $x = 1$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x) - y$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Pour tout $x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$, $f(x) - y > 0$, alors $(\mathscr{C})$ est au dessus de $(\mathscr{D})$.
- Pour tout $x \in]0; 1[$, $f(x) - y < 0$, alors alors $(\mathscr{C})$ est en dessous de $(\mathscr{D})$.
- Pour $x \in \{0; 1\}$, $f(x) - y = 0$, alors $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$ sont confondues. **(0,5 point)**

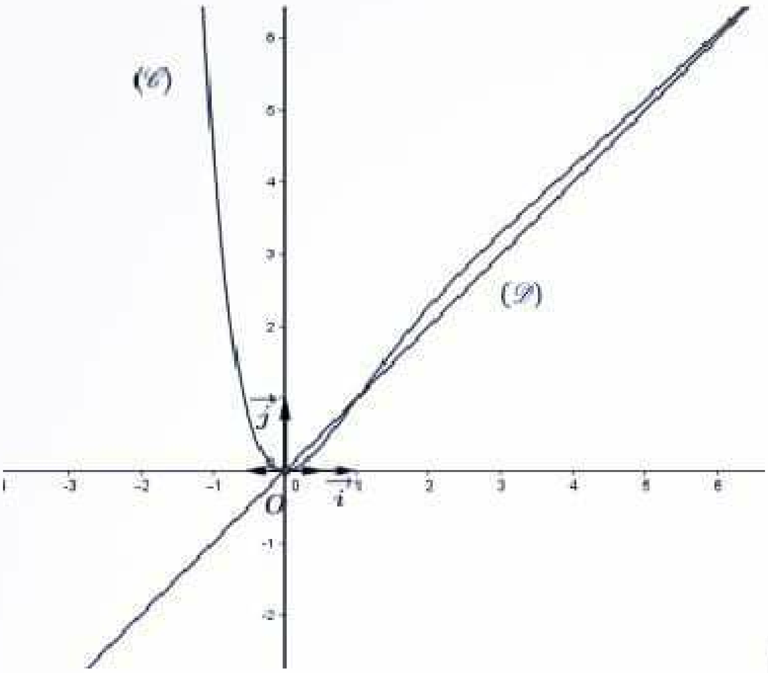
c) **Montrons que $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.**

$(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$.

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{(x^2 - x)\mathrm{e}^{-x} + x}{x} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} [(x-1)\mathrm{e}^{-x} + 1] = -\infty$$

D'où $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$. **(0,5 point)**

4. **Construisons la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite $(\mathscr{D})$ dans le même repère.**



(1 point)

5. On donne : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $f(u_n) = u_{n+1}$.

   a) **Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.**

   ► **Vérifions cette inégalité est vraie au rang initial** $(n = 0)$

   Pour $n = 0$, $0 \leq u_0 \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \leq 1$ vraie.

   ► **Supposons que cette inégalité est vraie au rang n, c'est-à-dire** $0 \leq u_n \leq 1$.

   ► **Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.**

   D'après l'hypothèse de récurrence, $0 \leq u_n \leq 1$.

   Comme f étant continue et croissante sur $[0;1]$,

   alors $f(0) \leq f(u_n) \leq f(1) \Longrightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1$ vraie.

   D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$. **(0,5 point)**

   b) **Montrons que la suite (u_n) est décroissante.**

   $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$.

   D'après **3.*b*)** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$, $f(u_n) - u_n \leq 0$.

   D'où la suite (u_n) est décroissante. **(0,5 point)**

   (a) **Déduisons-en que (u_n) converge puis déterminons sa limite.**

   ► **Déduisons-en que (u_n) converge**

   (u_n) étant minorée par 0 et décroissante, alors elle est convergente. **(0,5 point)**

   ► **Déterminons la limite de la suite (u_n).**

   Soit l la limite de la suite (u_n), on a : $f(l) = l$.

   $(l^2 - l)e^{-l} + l = l \Longrightarrow (l^2 - l)e^{-l} = 0$

   $(l^2 - l)e^{-l} = 0 \Longrightarrow l = 0$ ou $l = 1$, car $e^{-l} > 0$.

   Comme (u_n) étant décroissante et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_0$, alors $l = 0$.

   D'où $\boxed{\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 0}$ **(0,5 point)**

Exercice 4 : (3 points)
Soit Ω l'univers des possibilités.
Épreuve « tirage successivement et sans remise de deux boules de l'urne »
$card(\Omega) = A_8^2 = 56$.

1. **Montrons que $p(A) = \frac{13}{28}$ et $p(B) = \frac{1}{4}$.**
   ▶ **Pour $p(A) = \frac{13}{28}$.**
   $p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$ avec $card(A) = 2 \times A_2^1 \times A_6^1 + A_2^2 \times A_6^0 = 26$
   $p(A) = \frac{26}{56} = \frac{13}{28}$.
   D'où $\boxed{p(A) = \frac{13}{28}}$ **(0,5 point)**

   ▶ **Pour $p(B) = \dfrac{1}{4}$.**
   $p(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)}$ avec $card(B) = A_3^2 \times A_5^0 + A_3^2 \times A_5^0 + A_2^2 \times A_6^0 = 14$
   $p(B) = \frac{14}{56} = \frac{1}{4}$.
   D'où $\boxed{p(B) = \frac{1}{4}}$ **(0,5 point)**

2. $X(\Omega) = \{0;1;2\}$
   a) **Montrons que $p(X=2) = \frac{1}{28}$.**
   $p(X=2) = \frac{card(X=2)}{card(\Omega)}$ avec $card(X=2) = A_2^2 \times A_6^0 = 2$
   $p(X=2) = \dfrac{2}{56} = \dfrac{1}{28}$.
   D'où $\boxed{p(X=2) = \frac{1}{28}}$ (0,5 point)

   b) **Déterminons la loi de probabilité de X.**
   ▶ Cherchons les probabilités $p(X=0)$ et $p(X=1)$
   • **Pour $p(X=0)$**
   $p(X=0) = \frac{card(X=0)}{card(\Omega)}$ avec $card(X=0) = A_2^0 \times A_6^2 = 30$.
   $p(X=0) = \frac{30}{card(56} = \frac{15}{28}$
   • **Pour $p(X=1)$**
   $p(X=1) = \frac{card(X=1)}{card(\Omega)}$ avec $card(X=1) = 2A_2^1 \times A_6^1 = 24$.
   $p(X=1) = \frac{24}{card(56} = \frac{12}{28}$.

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{15}{28}$	$\frac{12}{28}$	$\frac{1}{28}$

   (0,5 point)

   c) **Calculons l'espérance mathématique**
   $$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i$$
   $E(X) = 0 \times \frac{15}{28} + 1 \times \frac{12}{28} + 2 \times \frac{1}{28} = \frac{14}{28} = 0,5$
   D'où $\boxed{E(X) = 0,5}$ **(0,5 point)**