LYCEE DE SASSEMA
Classe : 2nde C
Professeur : M NASSA

Année scolaire : 2023-2024
Date : 07 Mars 2024
Durée : 2h

COMPOSITION DU 2e TRIMESTRE
EPREUVE DE MATHEMATIQUES

NB : Calculatrice non autorisée

Exercice 1 (4pts)

Sans recopier le tableau, recopie le numéro de la question suivi de la lettre de la bonne réponse. Exemple : 5-C

N°	Questions / Réponses	A	B	C	D
1-	La mesure principale de $\frac{-349\pi}{13}$ est (1pt)	$\frac{11\pi}{13}$	$\frac{-11\pi}{13}$	$\frac{\pi}{13}$	$\frac{-\pi}{13}$
2-	ABC est un triangle iso-rectangle en B de sens direct alors Mes $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$ (1pt)	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
3-	Soit M $(\frac{-22\pi}{3})$ sur le cercle trigonométrique. Alors la longueur de l'arc $\widehat{IM}$ dans (O,I,J) est : (1pt)	$\frac{22\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{-22\pi}{3}$	$\frac{2}{3}$
4-	soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right]$ tel que $\cos x = \frac{1}{2}$ alors $\sin x =$ (1pt)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$

Exercice 2 (10pts)

Dans cet exercice, toutes les questions sont indépendantes :

1- Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\tan\frac{\pi}{8}$ sachant que : $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. ~~(3pts)~~ (2,5 pts)

2- Simplifier au maximum les expressions suivantes :

$A = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$ **(1,25pt)**

$B = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(x - 34\pi) + \sin(\pi - x)$ **(1,25pt)**

3- Démontrer les résultats suivants :

a) $\forall x \in]-\pi;\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}, \tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x . \sin^2 x$ **(1,25pts)**

b) $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$ **(1,25pt)**

c) $\forall t \in]-\pi;\pi],\ 4 \leq 7 + \cos(3t) - 2\sin t \leq 10$ **(1,25pt)**

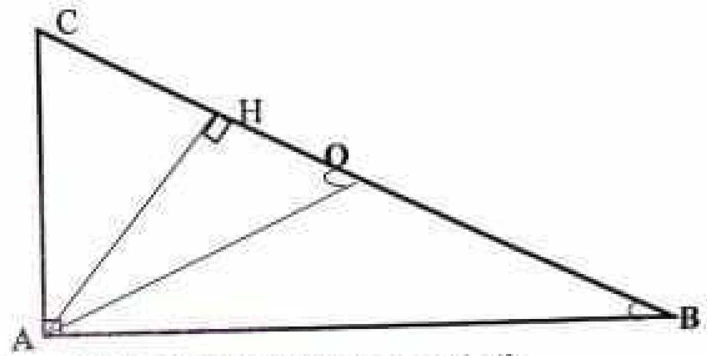
d) $\forall t \in]-\pi;\pi], \left|\sin t + \frac{1}{2}\cos t\right| \leq \frac{3}{2}$ **(1,25pt)**

Exercice 3 (6pts)

ABC est un triangle rectangle en A ; O est le milieu de $[BC]$ et H est le projeté orthogonal de A sur (BC). On rappelle que le cercle circonscrit au triangle ABC a pour Centre le point O soit le milieu de $[BC]$.

On désigne par $\propto$ la mesure en radian de l'angle $A\hat{B}C$ et on pose BC=2a où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

L'objectif de cet exercice est : exprimer $\sin(2\alpha)$ en fonction de $\cos \propto et \sin \propto$



1) a- Exprimer AB en fonction de a et $\propto$ **(1pt)**
   (on pourra utiliser le triangle ABC)
   b- Déduire l'expression de AH en fonction de a et $\propto$. **(1pt)**
2) a- Justifier que mes $(A\hat{O}C) = 2 \propto$ **(1pt)**
   b- En considérant le triangle AOH, exprimer AH en fonction de a et $\propto$. (1pt)
3) Déduire de $1 - b)$ et $2 - b)$ l'expression de $\sin(2 \propto)$ en fonction de $\cos \propto$ et $\sin \propto$ (2pt)

Bonne courage !!!!

E-mai | p de la compo du 1ᵉʳ T / 2nd C

Exercice 1 (4/4)

Répondons aux questions :

1 - B
2 - B
3 - B
4 - B.

1/1 Q8/...

Exercice 2 (10/15)

1 - Calcul de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\tan\frac{\pi}{8}$ sachant que : $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

De $\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8} = 1$ et $\frac{\pi}{8}\in[0;\frac{\pi}{2}]$

Alors $\boxed{\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$ car $\cos\frac{\pi}{8}>0$ (1,25)

De plus $\tan\frac{\pi}{8} = \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}}$

Soit $\boxed{\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{3-2\sqrt{2}}}$ (1,25)

2) Simplifions les expressions :

$A = \cos(\frac{\pi}{8})+\cos(\frac{-2\pi}{8})+\cos(\frac{6\pi}{8})+\cos(\frac{7\pi}{8})$

$= \cos(\frac{\pi}{8})+\cos(\pi-\frac{\pi}{8})+\cos(\frac{-2\pi}{8})+\cos(\pi-\frac{2\pi}{8})$

$= \cos\frac{\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{2\pi}{8} - \cos\frac{2\pi}{8}$

$\boxed{A = 0}$ (1,25)

$B = \cos(\frac{\pi}{2}+x)+\sin(\frac{\pi}{2}+x)+\cos(x-34\pi)+\sin(\pi-x).$

$B = -\sin x+\cos x+\cos x+\sin x$

$\boxed{B = 2\cos x}$ (1,25)

3) Démontrons les résultats :

a/ $\forall x\in]-\pi,\pi]\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$, $\tan^2x-\sin^2x = \tan^2x\cdot\sin^2x$.

On a : $\tan^2x-\sin^2x = \frac{\sin^2x}{\cos^2x}-\sin^2x$

$= \frac{\sin^2x-\cos^2x\sin^2x}{\cos^2x}$

$= \frac{\sin^2x(1-\cos^2x)}{\cos^2x}$

$= \frac{\sin^2x}{\cos^2x}\times\sin^2x$

$\boxed{\tan^2x-\sin^2x = \tan^2x\cdot\sin^2x}$ (1,25)

d'où le résultat voulu.

b) $\cos^4x+\sin^4x = 1-2\sin^2x\cos^2x$.

On a : $(\cos^2x+\sin^2x)^2 = \cos^4x+\sin^4x+2\cos^2x\sin^2x$

$\Rightarrow \cos^4x+\sin^4x = (\cos^2x+\sin^2x)^2-2\cos^2x\sin^2x$

$\Rightarrow \boxed{\cos^4x+\sin^4x = 1-2\cos^2x\sin^2x}$ (1,25)

d'où le résultat voulu.

c) $\forall t\in]-\pi,\pi]$, $4\le 7+\cos 3t-2\sin t\le 10$

On a : $-1\le\cos(3t)\le 1$ et $-1\le\sin t\le 1$

$\Rightarrow -2\le -2\sin t\le 2$

$\Rightarrow -3\le\cos 3t-2\sin t\le 3$

$\Rightarrow \boxed{4\le 7+\cos 3t-2\sin t\le 10}$ (1,25)

CQFD.

3) $\forall t \in]-\pi, \pi]$, $|\sin t + \frac{1}{2}\cos t| \leq \frac{3}{2}$

On a : $-1 \leq \sin t \leq 1$ et

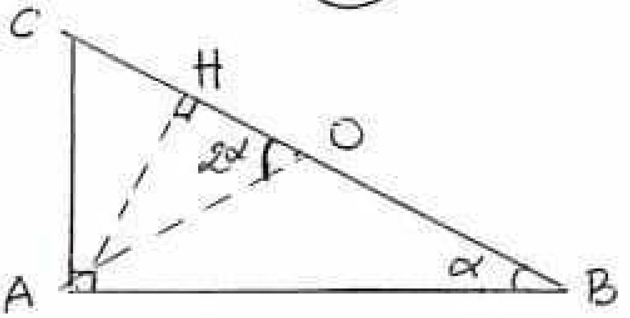
$$-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\cos t \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} \leq \sin t + \frac{1}{2}\cos t \leq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{|\sin t + \tfrac{1}{2}\cos t| \leq \tfrac{3}{2}}$$ (1,5pt)

CQFD.

Exercice 3 (6pts)



1-a) Expression de AB en fonction de a et α.

En considérant le Δ ABC rectangle en A. On a : $\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}$

Soit $\cos\alpha = \frac{AB}{2a} \Rightarrow \boxed{AB = 2a\cos\alpha}$ (1)

1-b) Expression de $AH = f(a, \alpha)$.

Considérons le triangle AHB rectangle en H. On a : $\sin \hat{B} = \frac{AH}{AB}$

Soit : $\sin\alpha = \frac{AH}{2a\cos\alpha} \Rightarrow AH = 2a\sin\alpha\cos\alpha$

$$\boxed{AH = 2a\sin\alpha\cos\alpha}$$ (1)

2-a) Justifions que $mes(\widehat{AOC}) = 2\alpha$.

$\widehat{AOC}$ est un angle au centre qui intercepte le même arc $\widehat{AC}$, que l'angle inscrit $\widehat{ABC}$. Alors

$mes\,\widehat{AOC} = 2\,mes(\widehat{ABC})$

Soit $\boxed{mes\,\widehat{AOC} = 2\alpha}$ (1)

b) Considérons AOH, exprimons AH en fonction de a et α.

AOH étant rectangle en H, on a :

$\sin\hat{O} = \frac{AH}{AO} \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{AH}{a}$

$\Rightarrow \boxed{AH = a\sin 2\alpha}$ (1)

3) Déduisons l'expression de $\sin(2\alpha)$ en fct° de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.

De 1-b) : $AH = 2a\sin\alpha\cos\alpha$

De 2-b) : $AH = a\sin 2\alpha$

$AH = AH \Rightarrow a\sin 2\alpha = 2a\sin\alpha\cos\alpha$ (2)

Soit $\boxed{\sin 2\alpha = \cancel{\sin\alpha}\, 2\sin\alpha\cos\alpha}$

Car $a \neq 0$.

4) Valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{8}$ et $\cos\frac{\pi}{8}$.

(Question annulée)

FIN

LYCEE DE SASSEMA
Classe : Tle D
Professeur : M. NASSA

Année scolaire : 2023-2024
Date : 07 mars 2024
Durée : 4h00

COMPOSITION DU DEUXIEME TRIMESTRE
EPREUVE DE MATHEMATIQUES

NB : Calculatrice non autorisée

Exercice 1 (4pts)

On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = e^{1-\frac{n}{2}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1) a- Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. (0,5pt)
   b- Soit (V_n) la suite définie par : $V_n = \ln(U_n)$
   Montrer que (V_n) existe et est arithmétique. Préciser la raison et le premier terme. (0,5pt)
   c- On pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ .Exprimer S_n en fonction de n. (0,5pt)
   d- Exprimer V_n puis U_n en fonction de n. (1pt)
2) On pose $P_n = U_o \times U_1 \times U_2 \times \ldots . \times U_n$.
   a) Montrer que $\ln(P_n) = V_o + V_1 + \ldots . + V_n$. (0,5pt)
   b) Exprimer P_n en fonction de n. (0,5pt)
3) Déterminer la limite de S_n et celle de P_n. (0,5pt)

Exercice 2 (4pts)

On considère le nombre complexe a défini par $a = \frac{3-i}{2+i} + \frac{2+i}{i} - 3(1-2i)^2 - 2(2+i)(3+i)$.

1) Ecrire a sous la forme algébrique. (0,5 pt)
2) Résoudre dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, le système d'inconnues z et z' $\begin{cases} z + iz' = 1 + i \\ \frac{1}{2}z + (1-i)z' = 2 - 5i \end{cases}$ (0,75 pt)
3) Le plan complexe P étant muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On a les points A et B d'affixes respectives $z_A = -2i$ et $z_B = 3 - i$. On considère l'application f de P privé de A dans P qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que
   $z' = \frac{z-3+i}{-iz+2}$
   a) Soit C le point d'affixe $1 - i$.
   Calculer l'affixe de $f(C)$. (0,5 pt)
   b) Montrer que $z' = \frac{i(z-3+i)}{z+2i}$. (0,25 pt)
   c) Interpréter géométriquement le module et l'argument de z'. (0,75 pt)
   d) En déduire :
   - l'ensemble E_1 des points M tel que $z' \in \mathbb{R}^*$. (0,5 pt)
   - l'ensemble E_2 des points M tel que $z' \in i\mathbb{R}^*$. (0,5 pt)
   - l'ensemble E_3 des points M tel que $|z'| = 1$. (0,5 pt)

PROBLEME (12 points)

Partie A (2 points)

On se propose de résoudre l'équation différentielle $(E): y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$

1) Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = axe^{2x} + b$ soit une solution de (E). (0,5 pt)
2) On pose $h = z + g$. Montrer que h est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle (E') : $y' - 2y = 0$. (0,5 pt)
3) Résoudre l'équation différentielle (E') et en déduire les solutions de (E). (0,5 pt)
4) Déterminer la solution k de (E) s'annulant en 0. (0,5 pt)

Partie B (4,5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 1)e^{2x} + 1$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan d'unité graphique 2cm.

1) a) Calculer la limite de f en $-\infty$. En déduire que la courbe représentative (C) de f admet une asymptote (D) dont on précisera l'équation. (0,5 pt)
   b) Etudier les positions relatives de (C) et (D) et préciser les coordonnées du point A, intersection de (C) et (D). (0,5 pt)
2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter le résultat obtenu. (0,75 pt)
3) a) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation. (1,25 pt)
   b) En déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$. (0,25 pt)
4) Tracer (D) et (C). (1,25 pt)

Partie C (4 points)

1) a) Calculer en utilisant une intégration par parties $I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - f(x))\, dx$. (1 pt)
   b) Donner une interprétation géométrique de I. (0,5 pt)
2) Calculer $J = \int_{-1}^{0} (2x - 1)\, e^{2x} dx$. (0,5 pt)
3) A l'aide d'une double intégration par parties, calculer $K = \int_{-1}^{0} (2x - 1)^2 e^{4x} dx$. (1 pt)
4) Soit Δ le domaine des points du plan tels que $-1 \leq x \leq 0$ et $0 \leq y \leq f(x)$.
   a) Exprimer en fonction de J et K le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de Δ autour de l'axe des abscisses. (0,5 pt)
   b) Calculer en cm^3 le volume V. (0,5 pt)

Partie D (1,5 points)

On considère dans le même repère que (C) la courbe (Γ) de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\ln t}{2} \\ y(t) = 1 - \frac{1 + \ln t}{t} \end{cases}, t \geq 1$$

1) Déterminer une équation cartésienne de (Γ). (0,75 pt)
2) Expliquer la construction de (Γ) à partir de (C) puis construire (Γ) en pointillés. (0,75 pt)

On donne : $\ln 2 \approx 0,69$.

Bon courage !!!

PROPOSITION DE CORRIGÉ DE LA COMPOSITION DU 2e TRIMESTRE.

Exercice 1 (4,5)

Soit $U_n = e^{1-\frac{n}{2}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

1-a/ Montrons que (U_n) est géométrique :

On a : $U_{n+1} = e^{1-\frac{n+1}{2}} = e^{\frac{2-n-1}{2}}$

$U_{n+1} = e^{\frac{1-n}{2}}$

$\Rightarrow U_{n+1} = e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{n}{2}}$

or $U_n = e^{1} \cdot e^{-\frac{n}{2}}$

$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{e^{1/2}}{e^{1}} = e^{-1/2}$

Alors (U_n) est géométrique de raison $q = e^{-1/2}$ et de premier terme $U_0 = e$. (0,5)

b/ Soit $V_n = \ln(U_n)$

Montrons que (V_n) est arithmétique.

On a : $V_{n+1} - V_n = \ln(U_{n+1}) - \ln(U_n)$

$= \ln\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)$

$= \ln\left(\frac{e^{1/2}}{e^{1}}\right)$

$= \ln(e^{-1/2})$ (0,5)

$= -1/2$

Alors (V_n) est arithmétique de raison $r = -\frac{1}{2}$ et de premier terme $V_0 = \ln(U_0) = \ln(e) = 1$.

c- On pose $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

Exprimons S_n en fonction de n.

S_n est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $e^{-1/2}$ et de premier terme e. Alors :

$$\boxed{S_n = e \times \frac{1-(e^{-1/2})^{n+1}}{1-e^{-1/2}}}$$ (0,5)

d) Exprimons V_n puis U_n en fonction de n.

On a : $U_n = U_0\, q^n \Rightarrow U_n = e(e^{-1/2})^n$

$$\boxed{U_n = e(e^{-1/2})^n}$$ (0,5)

$V_n = V_0 + nr \Rightarrow V_n = 1 + \left(\frac{-1}{2}\right)n$

$$\boxed{V_n = 1 - \frac{n}{2}}$$ (0,5)

2) On pose : $P_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n$

a) Montrons que $\ln(P_n) = \sum_{k=0}^{n} V_k$.

On a :

$\ln(P_n) = \ln(U_0 \times U_1 \times \cdots \times U_n)$
$= \ln(U_0) + \ln(U_1) + \cdots + \ln(U_n)$
$= V_0 + V_1 + \cdots + V_n$

d'où $\ln(P_n) = \sum_{k=0}^{n} V_k$. | 0,5

b) Exprimons P_n en fonction de n.

On a: $\ln(P_n) = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$

2) $P_n = e^{V_0+V_1+\cdots+V_n}$

Posons $S_n' = V_0 + \cdots + V_n$

Alors $S_n' = \frac{(V_0+V_n)(n+1)}{2}$

$S_n' = \frac{(1 + 1 - \frac{n}{2})(n+1)}{2}$

$S_n' = \frac{(4-n)(n+1)}{4}$ 0,5

Alors $\boxed{P_n = e^{\frac{(4-n)(n+1)}{4}}}$

3) Déterminons la limite de S_n et celle de P_n.

On a: $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{\infty}\left[e \times \frac{1-(e^{-1/2})^{n+1}}{1-e^{-1/2}}\right]$

$= e \times \frac{1}{1-e^{-1/2}}$

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{e}{1-e^{-1/2}}}$ 0,25

car $\lim_{n\to+\infty}(e^{-1/2})^{n+1} = 0$ car

$e^{-1/2} = \frac{1}{e^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \in]0;1[$

or $\lim_{\infty} q^n = 0$ si $q \in]0;1[$.

$\lim_{\infty} P_n = \lim_{\infty} e^{\frac{(4-n)(n+1)}{4}}$

$= 0$ car $\lim_{+\infty} \frac{(4-n)(n+1)}{4} = -\infty$

et $\lim_{N\to-\infty} e^{N} = 0$.

D'où $\boxed{\lim_{\infty} P_n = 0}$ | 0,25

Exercice 2. (4,5)

1) Ecriture de a sous forme algébrique:

$a = \frac{3+i}{2+i} + \frac{2+i}{i} - 3(1-2i)^2 - 2(2+i)(3+i)$

$a = \frac{(3+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} - i(2+i) - 3(1-4i+4i^2)$
$- 2(6+5i+i^2-1)$ 0,5

$a = \frac{5(1-i)}{5} = 1-i \Rightarrow \boxed{a = 1-i}$

- Résolvons dans $\mathbb{C}^2$

$$\begin{cases} z + iz' = 1+i \\ \frac{1}{2}z + (1-i)z' = 2-5i \end{cases}$$

$$\begin{cases} z+iz' = 1+i \\ \frac{1}{2}z + (1-i)z' = 2-5i \end{cases} \iff \begin{cases} z+iz' = 1+i \\ z'(-2+3i) = 3+11i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 1+i-iz' \\ z' = \frac{(3+11i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 1+i-i(3-i) \\ z' = 3-i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = -2i \\ z' = 3-i \end{cases} \quad 0,5$$

Ainsi $\boxed{S_{\mathbb{C}^2} = \{(-2i\,;\ 3-i)\}}$ 0,25

3) a) Soit C le point d'affixe $1-i$. Calculons l'affixe de $f(C)$.

On a : $Z_{f(C)} = \frac{Z_C - 3+i}{-iZ_C+2}$

$$Z_{f(C)} = \frac{1-i+3+i}{-i(1-i)+2} = \frac{4}{1-i}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_{f(C)} = 2+2i} \quad 0,5$$

b) Montrons que : $z' = \frac{i(z-3+i)}{z+2i}$

On a : $z' = \frac{z-3+i}{-iz+2} = \frac{z-3+i}{-i(z+2i)}$

$$z' = \frac{i(z-3+i)}{-i^2(z+2i)} = \frac{i(z-3+i)}{z+2i}$$

Donc $\boxed{z' = \frac{i(z-3+i)}{z+2i}}$ 0,25

c) Interprétation de $|z'|$ et $\arg(z')$.

Puisque $Z_A = -2i$ et $Z_B = 3-i$ et $z = Z_M$

Alors : $|z'| = \left|\frac{i(Z_M - Z_B)}{Z_M - Z_A}\right|$

$$\Rightarrow |z'| = |i| \times \frac{|Z_M - Z_B|}{|Z_M - Z_A|} \quad 0,25$$

$$\Rightarrow \boxed{|z'| = \frac{BM}{AM}} \quad \text{car } |i| = 1$$

$$\arg(z') = \arg(i) + \arg\left(\frac{Z_M - Z_B}{Z_M - Z_A}\right) [2\pi]$$

$$0,5 \quad = \frac{\pi}{2} + \text{mes}(\widehat{\vec{AM}, \vec{BM}}) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \boxed{\arg(z') = \text{mes}(\widehat{\vec{MA}, \vec{MB}}) + \frac{\pi}{2} [2\pi]}$$

d) Déduisons :

$E_2 = \{M \in (P) \mid z' \in \mathbb{R}^*\}$.

On a : $M(z) \in E_2 \Leftrightarrow z' \in \mathbb{R}^*$

$\Leftrightarrow \arg(z') = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (0,25)

$\Leftrightarrow mes(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow mes(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ainsi (E_2) est le cercle de diamètre $[AB]$ privé des pts A et B. (0,25)

$E_2 = \{M \in (P) \mid z' \in i\mathbb{R}^*\}$

On a : $M(z) \in E_2 \Leftrightarrow z' \in i\mathbb{R}^*$

$\Leftrightarrow \arg(z') = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow mes(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow mes(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}}) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (0,25)

Ainsi (E_2) est la droite (AB) privée des points A et B. (0,25)

$E_3 = \{M \in (P) \mid |z'| = 1\}$

$M(z) \in E_3 \Leftrightarrow |z'| = 1$

$\Leftrightarrow \frac{BM}{AM} = 1$ (0,25)

$\Leftrightarrow AM = BM$

Ainsi E_3 est la médiatrice du segment $[AB]$. (0,25)

Problème (12,75)

Partie A

Soit $(E) : y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$.

1) Déterminons a et b tels que $g(x) = axe^{2x} + b$ soit une solution de (E).

g solution de $(E) \Leftrightarrow$

$g'(x) - 2g(x) = 2(e^{2x} - 1), \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (axe^{2x} + b)' - 2(axe^{2x} + b) = 2(e^{2x} - 1)$

$\Leftrightarrow ae^{2x} - 2b = 2e^{2x} - 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ -2b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$ (0,5)

Ainsi $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 2xe^{2x} + 1}$

2) On pose $h = z + g$.

Montrons que h solution de (E) ssi z est solution de $(E') : y' - 2y = 0$

a: h solution de (E) $\iff$

$\forall x \in \mathbb{R}, \; h'(x) - 2h(x) = 2(e^{2x} - 1)$

$\iff (z(x) + g(x))' - 2(z(x) + g(x)) = 2(e^{2x} - 1)$

$\iff z'(x) - 2z(x) + \underbrace{g'(x) - 2g(x)}_{2(e^{2x}-1)} = 2(e^{2x} - 1)$

$\iff z'(x) - 2z(x) = 0, \; \forall x \in \mathbb{R}$

alors z est solution de (E') :

$y' - 2y = 0$. 0,5

3- Resolvons (E') et deduisons les solutions de (E).

On a : (E') : $y' - 2y = 0$

Les solutions de (E') sont les fonctions de la forme

$f : x \mapsto \lambda e^{2x}, \; \lambda \in \mathbb{R}$. 0,75

z est solution de (E') c-à-d $\forall x \in \mathbb{R}, \; z(x) = \lambda e^{2x}, \; \lambda \in \mathbb{R}$

ssi h est solution de (E)

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$h(x) = g(x) + z(x) = 2xe^{2x} + 1 + \lambda e^{2x}, \; \lambda \in \mathbb{R}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \; h(x) = (2x + \lambda)e^{2x} + 1$

On conclut que :

Les solutions de (E) sont les fonctions f de la forme :

$$\boxed{f : x \mapsto (2x + \lambda)e^{2x} + 1, \; \lambda \in \mathbb{R}}$$ 0,5

4) Determinons la solution k qui s'annule en 0.

Determinons λ pour $x = 0$.

On a : $k(0) = 0 \iff (2 \times 0 + \lambda)e^{0} + 1 = 0$

$\iff \lambda = -1$ 0,5

d'où $\boxed{k(x) = (2x - 1)e^{2x} + 1}$

Partie B.

On donne $f(x) = (2x - 1)e^{2x} + 1, \; \forall x \in \mathbb{R}$

1- a) Calcul de limite de f en $-\infty$

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} [(2x - 1)e^{2x} + 1]$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} (2xe^{2x} - e^{2x} + 1)$

$= \lim\limits_{X \to -\infty} (Xe^{X} - e^{X} + 1)$

$= 1$ car $\begin{cases} \lim\limits_{X \to -\infty} Xe^{X} = 0 \\ \lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0 \end{cases}$

d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1}$ 0,25

Interprétation graphique :

La droite (D) d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale à la courbe (C) en $-\infty$. 0,25

b) Position relative de (C) et (D).

Etudions le signe de $f(x)-1$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)-1=(2x-1)e^{2x}$

Or $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{2x}>0$, donc le signe de $f(x)-1$ est celui de $2x-1$.

On en déduit que :

- $\forall x\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$; $2x-1<0 \Rightarrow$ $f(x)-1<0$, $\forall x\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$;
- Si $x=\frac{1}{2}$; $2x-1=0$ donc $f(x)=1$
- $\forall x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, $2x-1>0 \Rightarrow$ $f(x)-1>0$ $\forall x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

Conclusion : 0,5

- (C) est en dessous de (D) sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$
- (C) coupe (D) au pt $A\left(\frac{1}{2};1\right)$
- (C) est au dessus de (D) $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

2) Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ puis interprétation.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)e^{2x}+1$
$=+\infty$

Car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(1)=1\end{cases}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.}$ 0,25

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(2x-1)e^{2x}+1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2x-1}{x}e^{2x}+\frac{1}{x}\right]$

$=2\times(+\infty)+0$

$=+\infty.$ 0,25

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty.}$

Interprétation graphique : 0,25

(C) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

c- Sens de variation de f et tableau de variation.

On sait que selon la partie f est solution de l'équation différentielle (E). Alors

$f'(x)-2f(x)=2e^{2x}-2$

D'où $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=2f(x)+2e^{2x}-2$

$\Rightarrow f'(x)=2(2x-1)e^{2x}+2e^{2x}$ (0,5)

$\Rightarrow \boxed{f'(x)=4xe^{2x}, \forall x\in\mathbb{R}}$

Or $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{2x}>0$ alors $f'(x)$ a le signe de $4x$, d'où :

$\forall x\in]-\infty;0[$, $f'(x)<0$

$\forall x\in]0;+\infty[$, $f'(x)>0$

$f'(0)=0$

Alors f est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$

f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

f admet un minimum 0 atteint en $x=0$. (0,25)

<u>Tableau de variation de f.</u>

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(0,25)

b) Signe de f sur $\mathbb{R}$.

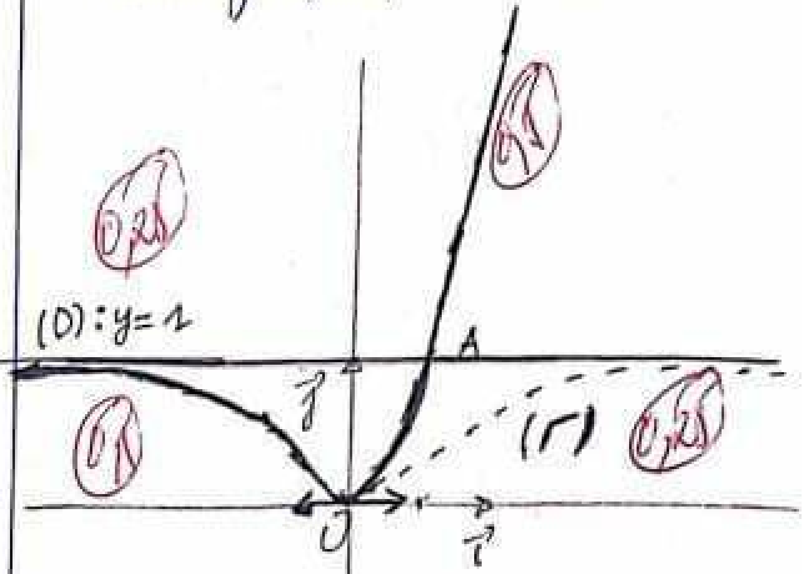
f est minorée par 0 $\forall x\in\mathbb{R}$.

Alors $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)\geq 0$

$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\geq 0}$ (0,25)

4) Traçons (D) et (C)

(Voir graphique ci-dessous).



Partie C.

1-a) Calculons $I=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-f(x))dx$.

On a : $I=\int_0^{\frac{1}{2}}-(2x-1)e^{2x}dx$

Procedons par une intégration par partie, Posons pour cela :

$\begin{cases} U(x)=-(2x-1) \\ v'(x)=e^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U'(x)=-2 \\ v(x)=\frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

Alors : $I=\int_0^{1/2}U(x)v'(x)dx$

$I=\left[Uv(x)\right]_0^{1/2}-\int_0^{1/2}U'(x)v(x)dx$

$\Rightarrow I=\left[-\frac{1}{2}e^{2x}(2x-1)\right]_0^{1/2}-\int_0^{1/2}e^{2x}dx$

$\Rightarrow I=-\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{1/2}$

$\Rightarrow \boxed{I=\frac{1}{2}(e-2)}$

1pt

b) Interpretation géometrique de I.

On a vu que sur l'intervalle $]-\infty;\frac{1}{2}]$, la droite horizontale $(D): y=1$ est au dessus de la courbe $(\mathcal{C})$. Et puisque $[0;\frac{1}{2}]\subset]-\infty;\frac{1}{2}]$ donc sur $[0;\frac{1}{2}]$ $1-f(x)\geq 0$.

De plus $I=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-f(x))dx$.

Alors : I represente l'aire du domaine délimitée par la droite (D), la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des ordonnées et la droite verticale d'équation $x=1/2$ en unité d'aire (u.a)

0,5

2) Calculons $J=\int_{-1}^{0}(2x-1)e^{2x}dx$.

Pour ne pas refaire un double calcul, on tire de la question 1-a) une primitive de la fonction $x\mapsto -(2x-1)e^{2x}$.

On a : $\int -(2x-1)e^{2x}dx=-\frac{1}{2}e^{2x}(2x-1)-\int e^{2x}dx$

$\Rightarrow \int -(2x-1)e^{2x}dx=e^{2x}(1-x)$

Donc une primitive de la fonction $x\mapsto(2x-1)e^{2x}$ est la fonction $x\mapsto -e^{2x}(1-x)=e^{2x}(x-1)$

On en deduit :

$J = \int_{-1}^{0}(2x-1)e^{2x}dx = [e^{2x}(x-1)]_{-1}^{0}$

$J = -1-(-2e^{-2}) = 2e^{-2}-1$

D'où $\boxed{J = 2e^{-2}-1}$ (0,5)

3) Calculons $K = \int_{-1}^{0}(2x-1)^2 e^{4x}dx$.

Posons : $\begin{cases} U_1(x) = (2x-1)^2 \\ V_1'(x) = e^{4x} \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} U_1'(x) = 4(2x-1) \\ V_1(x) = \frac{1}{4}e^{4x} \end{cases}$

Alors $K = [U_1V_1]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0}U_1'V_1\,dx$

$K = [\frac{1}{4}e^{4x}(2x-1)^2]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0}(2x-1)e^{4x}dx$

$K = \frac{1}{4} - \frac{9}{4}e^{-4} - \int_{-1}^{0}(2x-1)e^{4x}dx$ (0,5)

Posons $K' = \int_{-1}^{0}(2x-1)e^{4x}dx$.

Procédons par une seconde intégration par partie :

Posons : $\begin{cases} U_2 = 2x-1 \\ V_2' = e^{4x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_2' = 2 \\ V_2 = \frac{1}{4}e^{4x} \end{cases}$

Alors :

$K' = [U_2V_2(x)]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0}U_2'V_2(x)\,dx$

$= [\frac{1}{4}e^{4x}(2x-1)]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0}\frac{1}{2}e^{4x}dx$

$= (-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}e^{-4}) - \frac{1}{2}[\frac{1}{4}e^{4x}]_{-1}^{0}$

$K = -\frac{1}{4}+\frac{3}{4}e^{-4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}e^{-4}$

Alors $K = \frac{1}{4} - \frac{9}{4}e^{-4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}e^{-4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}e^{-4}$

$\Rightarrow K = \frac{1}{2} - 3e^{-4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}e^{-4}$

$\Rightarrow \boxed{K = \frac{5}{8}(1-5e^{-4})}$ (0,5)

4-a) Soit Δ le domaine des pts du plan tels que : $-1 \le x \le 0$ et $0 \le y \le f(x)$. Alors le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de Δ autour de l'axe des abscisses est en unité de volume :

$V = \pi\int_{-1}^{0}[f(x)]^2dx$ (u.v)

Calculons V.

$V = \pi\int_{-1}^{0}[(2x-1)e^{2x}+1]^2dx$

$= \pi[\int_{-1}^{0}(2x-1)^2e^{4x}dx + 2\int_{-1}^{0}(2x-1)e^{2x}dx +$

$\int_{-1}^{0} dx \,]$

$\Rightarrow V = \pi(K + 2J + 1)\ u.v$

Car $\int_{-1}^{0} dx = 1$

On conclut que : $\boxed{V = \pi(K+2J+1)\ u.v}$

b) Calculons en cm^3, V.

On a : $V = \pi\left(\frac{5}{8} - \frac{25}{8}e^{-4} + 2(2e^{-2} - 1) + 1\right) u.v$

$\Rightarrow V = \pi\left(-\frac{3}{8} - \frac{25}{8}e^{-4} + 4e^{-2}\right) u.v$

Avec $1\ u.v = (2cm)^3 = 8\,cm^3$

$\Rightarrow V = 8\pi\left(-\frac{3}{8} - \frac{25}{8}e^{-4} + 4e^{-2}\right) cm^3$

$\Rightarrow \boxed{V = \pi(-3 + 32e^{-2} - 25e^{-4})\ cm^3}$

Partie D

$$(\Gamma) : \begin{cases} x(t) = \frac{\ln t}{2} \\ y(t) = 1 - \frac{1 + \ln t}{t} \end{cases} \quad (t \geq 1)$$

1) Equation cartésienne de (Γ).

On a $\forall t \geq 1$; $x(t) = \frac{t}{2} \Rightarrow$

$\ln t = 2x(t) \Rightarrow t = e^{2x(t)}$

On écrit alors y en fonction de x.

$\forall t \geq 1$; $y(t) = 1 - \frac{1 + \ln t}{t}$

$\Rightarrow y(t) = 1 - (1 + 2x(t))e^{-2x(t)}$

Or $\forall t \geq 1 \Rightarrow \ln t \geq 0 \Rightarrow x(t) \geq 0$

D'où une équation cartésienne de (Γ) s'écrit :

$\boxed{y(x) = 1 - (1+2x)e^{-2x} \ ; \ x \geq 0}$

2) Construction de (Γ) à partir de (C) :

On remarque que :

$\forall x \geq 0$; $y(x) = 1 - (1+2x)e^{-2x}$

$\Rightarrow y(x) = (-2x - 1)e^{-2x} + 1$

$\Rightarrow y(x) = (2(-x) - 1)e^{2(-x)} + 1$

$\Rightarrow y(x) = f(-x)$

Or $\forall x \geq 0$; $-x \leq 0$

On en déduit que :

(Γ) se déduit par symétrie orthogonale d'axe l'axe des ordonnées de la partie de la courbe (C) située sur $]-\infty ; 0]$.

(voir graphique pour la construction).

FIN