LYCEE DE SASSEMA
Classe : 1ère D
Professeur : M. NASSA

Année scolaire : 2023-2024
Date : 07 mars 2024
Durée : 2h30

COMPOSITION DU DEUXIEME TRIMESTRE
EPREUVE DE MATHEMATIQUE

EXERCICE 1 (10pts)

I) Calculer les limites suivantes : (1pt x 5)

a) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{5+x^2}-\sqrt{5}}{4x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$ (on rappel que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$)

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{2x^2 - x + 3}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x - \sqrt{5x^2 + 3}$

II) 1-Démontrer que $\forall x \in [1; +\infty[\, , on\ a : \frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} \leq 1$ (1pt)

2-En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$ $(2pts)$

III) On considère la fonction f définie sur $[2; +\infty[$ $par\ f(x) = \frac{3x+\sin x}{x-1}$

1- Montrer que $\forall x \geq 2, on\ a :\ |f(x) - 3| \leq \frac{4}{x-1}$ (1pt)

2- En déduire la limite de $f\ en + \infty$. (1pt)

EXERCICE 2 (10pts)

I-Etudier la dérivabilité en x_0 des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sqrt{x+1}$; $x_0 = 1$ (1pt)

b) $g(x) = x|x|$; $x_0 = 0$ (1pt)

II- Préciser le domaine de dérivabilité puis calculer la fonction dérivée : (1pt x5)

a- $f(x) = (x+1)^2(3-2x)$

b- $g(x) = \sqrt{2x-1}$

c- $h(x) = \frac{2x+1}{3x-5}$

d- $k(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$

e- $q(x) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

III- Etudier le sens de variation des fonctions suivantes :

1) $f(x) = -2x^2 + x + 3$ (1pt)

2) $g(x) = x + 3 + \frac{4}{x-1}$ (1pt)

IV- On pose $g(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.
Déterminer a, b et c pour que 1 et 2 soient deux extremums relatifs pour g puis le point A (0 ;2) appartienne à la courbe de g. (1pt)

Bon courage !

$\Rightarrow -\frac{1}{x+1} \geq -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 1-\frac{1}{x+1} \geq 1-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{x}{x+1} \geq \frac{1}{2}$ (car $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$)

Par ailleurs : $\forall x \geq 1$, $\frac{1}{x+1} \geq 0$

$\Rightarrow -\frac{1}{x+1} \leq 0$

$\Rightarrow 1-\frac{1}{x+1} \leq 1$

$\Rightarrow \frac{x}{x+1} \leq 1$

En resumé : $\forall x \geq 1$, on a :

$$\boxed{\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} \leq 1}$$ 1

2) Deduisons $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$

On a : $\forall x \geq 1$, $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} \leq 1$

or $\sqrt{x} > 0$, $\forall x \geq 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{x} \leq \frac{x\sqrt{x}}{x+1} \leq \sqrt{x}$

On a : $\lim_{x\to+\infty} (\frac{1}{2}\sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x}) = +\infty$

Par application du Theorème des gendarmes, on a :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1} = +\infty}$$ 1

Deduisons $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$.

On a : $\frac{1}{\sqrt{x}} > 0$, $\forall x \geq 1$

Alors : $\frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{x}{x+1}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}(1)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

or $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

Alors selon le théorème des gendarmes : 1 $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)} = 0}$

III) Soit $f(x) = \frac{3x+\cos x}{x-1}$, $\forall x \geq 2$

1) Montrons que $\forall x \geq 2$, on a :

$|f(x)-3| \leq \frac{4}{x-1}$.

On a : $\forall x \geq 2$; $-1 \leq \cos x \leq 1$ et

$f(x)-3 = \frac{3x+\cos x}{x-1} - 3 = \frac{\cos x+3}{x-1}$

Ainsi : $2 \leq \cos x+3 \leq 4$

$\forall x \geq 2$, $\frac{1}{x-1} > 0$

Alors : $\frac{2}{x-1} \leq \frac{\cos x+3}{x-1} \leq \frac{4}{x-1}$

Proposition de corrigé
Composition du 2e trim 1re D.

Exercice 1 (10 pts)

I/ Calculons les limites :

a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$

$= \lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}$

$$\boxed{\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} = \frac{1}{2\sqrt{3}}}$$ (1)

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{5+x^2}-\sqrt{5}}{4x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{5+x^2-5}{4x^2(\sqrt{5+x^2}+\sqrt{5})}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{4(\sqrt{5+x^2}+\sqrt{5})}$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{5+x^2}-\sqrt{5}}{4x^2} = \frac{1}{8\sqrt{5}}}$$ (1)

c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} = \lim\limits_{X\to 0} \frac{\sin(\pi X+\pi)}{X}$

$= -\lim\limits_{X\to 0} \frac{\sin(\pi X)}{X}$

$= -\lim\limits_{X\to 0} \frac{\sin(\pi X)}{\pi X} \cdot \frac{\pi X}{X}$

$= -\pi$ car $\lim\limits_{X\to 0} \frac{\sin \pi X}{\pi X} = 1$.

D'où $$\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} = -\pi}$$ (1)

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{2x^2-x+3} =$

$\lim\limits_{x\to -\infty} -x\sqrt{2-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}} = +\infty$

Car $\lim\limits_{x\to -\infty} (-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{2-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}} = \sqrt{2}$.

D'où $$\boxed{\lim_{x\to -\infty} \sqrt{2x^2-x+3} = +\infty}$$ (1)

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} 3x-\sqrt{5x^2+3} = \lim\limits_{x\to +\infty} \left[3x - x\sqrt{5+\frac{3}{x^2}}\right]$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} x\left[3-\sqrt{5+\frac{3}{x^2}}\right]$

$= +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} (x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} 3-\sqrt{5+\frac{3}{x^2}} = 3-\sqrt{5} \\ \text{et } 3-\sqrt{5} > 0. \end{cases}$

D'où $$\boxed{\lim_{x\to +\infty} 3x-\sqrt{5x^2+3} = +\infty}$$ (1)

II) 1) Démontrons que $\forall x \geq 1$

on a : $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} \leq 1$.

On a : $\frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$

or $\forall x \geq 1 \Rightarrow x+1 \geq 2$

$\Rightarrow \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$

$\boxed{g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}}$ 0,75

c) $h(x) = \frac{2x+1}{3x-5}$ 0,75

$D_{h'} = \mathbb{R}\setminus\{\frac{5}{3}\}$. 0,75

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{5}{3}\}$; on a:

$h'(x) = \left(\frac{2x+1}{3x-5}\right)' = \frac{(2x+1)'(3x-5)-(3x-5)'(2x+1)}{(3x-5)^2}$

$h'(x) = \frac{2(3x-5)-3(2x+1)}{(3x-5)^2}$

$\boxed{h'(x) = \frac{-13}{(3x-5)^2}}$ 0,75

d) $k(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$ 0,75

$D_{k'} =]-\infty; \frac{1}{2}[$. 0,25

$\forall x \in]-\infty; \frac{1}{2}[$, on a:

$k'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\right)' = \frac{-(\sqrt{1-2x})'}{(1-2x)}$

$k'(x) = -\frac{\frac{-2}{2\sqrt{1-2x}}}{1-2x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-2x}}}{1-2x}$

$\boxed{k'(x) = \frac{1}{(1-2x)\sqrt{1-2x}}}$ 0,75

e) $q(x) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ 0,75

$D_{q'} =]0; +\infty[$ 0,25

$\forall x > 0$, $q'(x) = \left[\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]'$

$q'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' \cos'\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$= \left(-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\right)\left(-\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)$

$\boxed{q(x) = \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{2x\sqrt{x}}}$ 0,75

III/ Etudions le sens de variation.

1) $f(x) = -2x^2 + x + 3$.

$D_f = \mathbb{R}$. f est derivable sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{f'(x) = -4x + 1}$ 0,5

signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$1/4$	$+\infty$
$-4x+1$	+	0	−

Si $x \in]-\infty; \frac{1}{4}]$, $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur $]-\infty; \frac{1}{4}]$.

Si $x \in [\frac{1}{4}; +\infty[$, $f'(x) \leq 0$, alors f est decroissante sur $[\frac{1}{4}; +\infty[$ 1

2) $g(x) = x + 3 + \frac{4}{x-1}$

$D_g = D_{g'} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

g est derivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par:

$\Rightarrow \dfrac{2}{x-1} \leq f(x)-3 \leq \dfrac{4}{x-1}$

Or $-\dfrac{4}{x-1} \leq \dfrac{2}{x-1}$, $\forall x \geq 2$

Alors: $-\dfrac{4}{x-1} \leq f(x)-3 \leq \dfrac{4}{x-1}$

$\Leftrightarrow \boxed{\left|f(x)-3\right| \leq \dfrac{4}{x-1}}$ car $\dfrac{4}{x-1}>0$ (1)

2) Déduisons limite de f en $+\infty$.

On a: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x-1} = 0$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)-3| = 0 \Rightarrow$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3}$ (1)

Exercice 2 (10 pts)

I- Etudions la dérivabilité en x_0.

a) $f(x)=\sqrt{x+1}$; $x_0=1 \in D_f$.

On a: $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to1} \dfrac{(x+1)-(\sqrt{2})^2}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}$ (1)

$= \lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Alors f est dérivable en 1.

b) $g(x)=x|x|$; $x_0=0$

On a: $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x\leq 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to0^<} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^<} \dfrac{-x^2-0}{x-0}$

$= \lim\limits_{x\to0^<} (-x) = 0$

$\lim\limits_{x\to0^>} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^>} \left(\dfrac{x^2}{x}\right) = 0$

Alors f est dérivable en 0 (1)

II/ Précisons le domaine de dérivabilité puis calculons la fonction dérivée:

a) $f(x)=(x+1)^2(3-2x)$. (0,25)

$D_{f'} = \mathbb{R}$ car f est polynomiale.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=[(x+1)^2(3-2x)]'$

$f'(x)=2(x+1)(3-2x)-2(x+1)^2$

$\boxed{f'(x)=2(x+1)(2-3x)}$ (0,75)

b) $g(x)=\sqrt{2x-1}$

$D_{g'} = \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ (0,25)

$\forall x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$;

$g'(x)=(\sqrt{2x-1})'$

$= \dfrac{2}{2\sqrt{2x-1}}$

$$g'(x) = \left(x+3+\frac{4}{x-1}\right)'$$

$$= 1 - \frac{4}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(x-1)^2 - 4}{(x-1)^2}$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}}$$

0,5

Signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $(x-1)^2 > 0$ alors le signe de $g'(x)$ est celui de $(x-3)(x+1)$.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	|	$-$	||	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	||	$+$	|	$+$	
$(x-3)(x+1)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	

Ainsi $\forall x \in]-\infty; -1] \cup [3; +\infty[$

$g'(x) \geq 0$ alors g est croissante sur $]-\infty; -1]$ et sur $[3; +\infty[$

1

$\forall x \in [-1; 1[\cup]1; 3]$, $g'(x) \leq 0$ alors g est décroissante sur $[-1; 1[$ et sur $]1; 3]$.