EXERCICE 1 — 3 points

Une urne contient huit boules : 3 boules rouges, 3 boules vertes et deux boules blanches (indiscernables au toucher).
On tire au hasard, successivement et sans remise, deux boules de l'urne.

1. On considère les événements suivants :
   A : " obtenir au moins une boule blanche ".
   B : "obtenir deux boules de la même couleur ".
   Montrer que : $P(A) = \frac{13}{28}$ et $P(B) = \frac{1}{4}$. (1pt)

2. Soit X la variable aléatoire associée au nombre de boules blanches tirées.
   a) Montrer que $P(X = 2) = \frac{1}{28}$. (0,5pt)
   b) Déterminer la loi de probabilité de X (1pt)
   c) Calculer l'espérance mathématique. (0,5pt)

SOLUTION 1

1. Tirage successive et sans remise (cas de l'arrangement)
   Soit $Card(\Omega) = A_n^p$, avec $n = 8$; $p = 2 \Rightarrow Card(\Omega) = A_8^2 = 56$

1ère Méthode :

Par définition : $\boxed{P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}}$

Trouvons d'abord $Card(A)$

Pour trouver $Card(A)$, on peut utiliser 2 possibilités (tirer une boule blanche parmi les deux boules de l'urne et une autre boule parmi les six autres boules restantes de l'urne) ou soit (tirer deux boules blanches parmi les deux boules blanches de l'urne et zéro boule parmi les six autres boules de l'urne), ainsi nous avons :

$$Card(A) = 2A_2^1 \times A_6^1 + A_2^2 \times A_6^0 = 2 \times 2 \times 6 + 2 \times 1 = 26$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{26}{56} = \frac{2 \times 13}{28 \times 2} = \frac{13}{28}$$

Donc $\boxed{P(A) = \frac{13}{28}}$

2ème Méthode :

Pour calculer la probabilité de A, on peut utiliser deux possibilités (tirer une boule blanche dès le premier tirage) ou (ne tirer une boule blanche qu'au deuxième tirage.

Si on tire une boule blanche dès le premier tirage, il y a 2 boules blanches sur 8, ainsi la probabilité lors du premier tirage est $P(b_1) = \left(\frac{2}{8}\right)$.

Si on tire une boule blanche qu'au deuxième tirage, il faut que la première boule tirée soit rouge ou verte (6 boules sur 8) et que la deuxième soit blanche (2 boules blanches sur les 7 boules restantes).

Ainsi, nous avons : $P\big((r_1 \cup v_1) \cap b_2\big) = \left(\frac{6}{8}\right)\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{12}{56} = \frac{3}{14}$

Par conséquent la probabilité de A est :

$$P(A) = P(b_1) \cup P\big((r_1 \cup v_1) \cap b_2\big) = \frac{2}{8} + \frac{12}{56} = \frac{2\times7+12}{56} = \frac{26}{56} = \frac{2\times13}{28\times2}$$

Donc $\boxed{P(A) = \frac{13}{28}}$

- **Montrons que : $P(B) = \frac{1}{4}$**

Soit l'événement B : ''obtenir deux boules de la même couleur ''.

1ère Méthode :

Par définition : $\boxed{P(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)}}$

Trouvons d'abord $Card(B)$

Pour trouver $Card(B)$, on peut utiliser 3 possibilités (tirer deux boules rouges parmi les trois boules rouges de l'urne) ou soit (tirer deux boules vertes parmi les trois boules vertes de l'urne) ou encore (tirer deux boules blanches parmi les deux boules blanches de l'urne), ainsi nous avons :

$$\Rightarrow P(A) = \frac{26}{56} = \frac{2 \times 13}{28 \times 2} = \frac{13}{28}$$

Donc $\boxed{P(A) = \frac{13}{28}}$

2ème Méthode :

Pour calculer la probabilité de A, on peut utiliser deux possibilités (tirer une boule blanche dès le premier tirage) ou (ne tirer une boule blanche qu'au deuxième tirage.

Si on tire une boule blanche dès le premier tirage, il y a 2 boules blanches sur 8, ainsi la probabilité lors du premier tirage est $P(b_1) = \left(\frac{2}{8}\right)$.

Si on tire une boule blanche qu'au deuxième tirage, il faut que la première boule tirée soit rouge ou verte (6 boules sur 8) et que la deuxième soit blanche (2 boules blanches sur les 7 boules restantes).

Ainsi, nous avons : $P\big((r_1 \cup v_1) \cap b_2\big) = \left(\frac{6}{8}\right)\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{12}{56} = \frac{3}{14}$

Par conséquent la probabilité de A est :

$$P(A) = P(b_1) \cup P\big((r_1 \cup v_1) \cap b_2\big) = \frac{2}{8} + \frac{12}{56} = \frac{2\times7+12}{56} = \frac{26}{56} = \frac{2\times13}{28\times2}$$

Donc $\boxed{P(A) = \frac{13}{28}}$

- **Montrons que : $P(B) = \frac{1}{4}$**

Soit l'événement B : ''obtenir deux boules de la même couleur ''.

1ère Méthode :

Par définition : $\boxed{P(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)}}$

Trouvons d'abord $Card(B)$

Pour trouver $Card(B)$, on peut utiliser 3 possibilités (tirer deux boules rouges parmi les trois boules rouges de l'urne) ou soit (tirer deux boules vertes parmi les trois boules vertes de l'urne) ou encore (tirer deux boules blanches parmi les deux boules blanches de l'urne), ainsi nous avons :

$$Card(B) = A_3^2 + A_3^2 + A_2^2 = 6 + 6 + 2 = 14$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{14}{56} = \frac{1 \times 14}{14 \times 4} = \frac{1}{4}$$

Donc $\boxed{P(B) = \frac{1}{4}}$

2ème Méthode :

Pour calculer la probabilité de B, on peut utiliser trois possibilités (tirer deux boules rouges) ou (tirer deux boules vertes) ou encore (tirer deux boules blanches).

La probabilité de tirer deux boules rouges est :

$$P(2blesrouges) = \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{3}{28}.$$

La probabilité de tirer deux boules vertes est :

$$P(2blesvertes) = \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{3}{28}.$$ **Et**

La probabilité de tirer deux boules blanches est :

$$P(2blesblanchhes) = \left(\frac{2}{8}\right)\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{28}. ;$$

Par conséquent, la probabilité de B est la somme de ces trois probabilités :

$$P(B) = P(2blesrouges) + P(2blesvertes) + P(2blesblanches)$$

$$P(B) = \left(\frac{3}{28}\right) + \left(\frac{3}{28}\right) + \left(\frac{1}{28}\right) = \frac{3+3+1}{28} = \frac{14}{28} = \frac{1}{4}$$

Donc $\boxed{P(B) = \frac{1}{4}}$

3. **La variable aléatoire X associée au nombre de boules blanches tirées prend les valeurs : $\{0; 1; 2\}$**

   d) **Montrer que $P(X = 2) = \frac{1}{28}$.**

   Par définition : $P(X = 2) = \frac{Card(X=2)}{Card(\Omega)}$

On rappelle que $P(X=2)=\frac{1}{28}$ d'après la question 2. A)

D'où la loi de probabilité de X est définie par :

X	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{15}{28}$	$\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$	$\frac{1}{28}$

c) Calculons l'espérance mathématique.

Par définition : $\boxed{E(X)=\sum_{i=1}^{3} X.P(X=x_i)}$

$\Rightarrow E(X)=\frac{0\times15+1\times12+2\times1}{28}=\frac{14}{28}=\frac{1}{2}=0,5$

$\Rightarrow \boxed{E(X)=0,5}$