INSPECTION DES LYCÉES D'ENSEIGNEMENT GENERAL ZONE 1
(Brazzaville)
llegz1bzpool@gmail.com

Année scolaire 2023-2024

Compositions du 2e Trimestre

Niveau : Terminale **Série : D**
Epreuve : Mathématiques **Durée : 4 Heures**

Exercice 1 : (05 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe $z_A = 1$ et le cercle $(\mathscr{C})$ de centre A et de rayon $1\ cm$. Soit B le point d'affixe $z_B = 1 + e^{\frac{\pi}{3}i}$, E le point d'affixe $z_E = 1 + z_B^2$ et F le point d'affixe $z_F = 2$.

1. a) Construire le cercle $(\mathscr{C})$. **(0,5 pt)**
   b) Montrer que B appartient à $(\mathscr{C})$. **(0,5 pt)**
2. a) Déterminer la forme exponentielle de $\dfrac{z_B - z_A}{z_F - z_A}$. **(0,5 pt)**
   b) En déduire la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB})$ et la nature du triangle AFB. **(1 pt)**
   c) Placer alors le point B sur $(\mathscr{C})$. **(0,5 pt)**
3. On donne $z_B = \sqrt{3}.e^{\frac{\pi}{6}i}$.
   Montrer que les points A , B et E sont alignés. **(0,5 pt)**
4. Soit f la similitude plane directe de centre O, de rapport 2 et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$.
   a) Déterminer l'expression complexe de f. **(1 pt)**
   b) Déterminer l'affixe de B' image de B par f. **(0.5 pt)**

Exercice 2 : (05 points)

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f : \begin{cases} x' = -2x + y + z \\ y' = x - 2y + z \\ z' = x + y - 2z \end{cases}.$$

1. a) Écrire la matrice M de f dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$. **(0.5 pt)**
   b) Montrer que f n'est pas un automorphisme. **(0.5 pt)**
2. Déterminer le noyau $Kerf$ de f et en donner une base $\vec{e_1}$. **(1 pt)**
3. Déterminer l'image Imf de f et en donner une base $(\vec{e_2}, \vec{e_3})$. **(1 pt)**
4. Montrer que $Kerf$ et Imf sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$. **(1 pt)**
5. On donne $\vec{u}_1 = (1; 1; 1)$, $\vec{u}_2 = (-1; 1; 0)$ et $\vec{u}_3 = (-1; 0; 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
   a) Montrer que $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$. **(0.5 pt)**
   b) Déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$. **(0.5 pt)**

INSPECTION DES LYCEES D'ENSEIGNEMENT GENERAL ZONE 1
(Brazzaville)
Ilegz1bzpool@gmail.com

Année scolaire 2023-2024

Compositions du 2e Trimestre

Niveau : Terminale **Série : D**
Epreuve : Mathématiques **Durée : 4 Heures**

Exercice 1 : (05 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe $z_A = 1$ et le cercle $(\mathscr{C})$ de centre A et de rayon $1\ cm$. Soit B le point d'affixe $z_B = 1 + e^{\frac{\pi}{3}i}$, E le point d'affixe $z_E = 1 + z_B^2$ et F le point d'affixe $z_F = 2$.

1. a) Construire le cercle $(\mathscr{C})$. **(0,5 pt)**
   b) Montrer que B appartient à $(\mathscr{C})$. **(0,5 pt)**
2. a) Déterminer la forme exponentielle de $\frac{z_B - z_A}{z_F - z_A}$. **(0,5 pt)**
   b) En déduire la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB})$ et la nature du triangle AFB. **(1 pt)**
   c) Placer alors le point B sur $(\mathscr{C})$. **(0,5 pt)**
3. On donne $z_B = \sqrt{3}.e^{\frac{\pi}{6}i}$.
   Montrer que les points A , B et E sont alignés. **(0,5 pt)**
4. Soit f la similitude plane directe de centre O, de rapport 2 et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.
   a) Déterminer l'expression complexe de f. **(1 pt)**
   b) Déterminer l'affixe de B' image de B par f. **(0.5 pt)**

Exercice 2 : (05 points)

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f : \begin{cases} x' = -2x + y + z \\ y' = x - 2y + z \\ z' = x + y - 2z \end{cases}.$$

1. a) Écrire la matrice M de f dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$. **(0.5 pt)**
   b) Montrer que f n'est pas un automorphisme. **(0.5 pt)**
2. Déterminer le noyau $Kerf$ de f et en donner une base $\overrightarrow{e_1}$. **(1 pt)**
3. Déterminer l'image Imf de f et en donner une base $(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. **(1 pt)**
4. Montrer que $Kerf$ et Imf sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$. **(1 pt)**
5. On donne $\vec{u}_1 = (1; 1; 1)$, $\vec{u}_2 = (-1; 1; 0)$ et $\vec{u}_3 = (-1; 0; 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
   a) Montrer que $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$. **(0.5 pt)**
   b) Déterminer la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$. **(0.5 pt)**

Exercice 3 : (07 points)

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = 1 + x - ln|e^x - e|$.
Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 3 : (07 points)

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = 1 + x - ln|e^x - e|$.
Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition E_f de f. **(0,5 pt)**
2. a) Montrer que : $f(x) = 1 - ln|1 - e^{1-x}|$, $\forall x \in E_f$. **(0.5pt)**
   b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. **(0,5 pt)**
3. a) Monter que : $\forall x \in E_f$, $f'(x) = \dfrac{-1}{e^{x-1} - 1}$. **(0.5pt)**
   b) Dresser le tableau de signe de f' sur E_f. **(0.5pt)**
   c) Dresser le tableau de variation de f sur E_f. **(0.5pt)**
   On donne : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
4. a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ en $-\infty$. **(0.5pt)**
   b) Montrer qu'il existe un réel unique α appartenant à l'intervalle $]-1;0[$ tel que $f(\alpha) = 0$. **(0.5pt)**
   c) Le point $A(1 + ln2; 1 + ln2)$ appartient à la courbe $(\mathscr{C})$. Construire la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (D). **(1pt)**
5. Soit g la restriction de f sur $I =]1; +\infty[$.
   a) Tracer la courbe $(\mathscr{C}')$ de g^{-1}, la bijection réciproque de g sur I. **(0,5pt)**
   b) Déterminer l'expression analytique de g^{-1}. **(0.5pt)**
6. a) Calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{-e^{1-x}}{1 - e^{1-x}} dx$. **(0,5pt)**
   b) Donner une interprétation graphique de cette intégrale. **(0,5pt)**

Exercice 4 : (03 points)

Dans un jeu de 32 cartes bien battues, on a 4 familles "trèfle" et "pique", de couleur noire, "carreau" et "cœur" de couleur rouge. Chaque famille contient trois "figures" : Dame, Roi et valet. On tire au hasard et d'une seule main deux cartes de ce jeu et on considère les évènements suivants :

A : "les deux cartes sont de la même famille" ;
B :" les deux cartes sont pique et roi de "trèfle" et de "cœur" respectivement ;
C : " tirer des cartes de couleurs différentes"

1. Calculer le nombre de tirages possibles de deux cartes de ce jeu. **(0,5 pt)**
2. Calculer la probabilité de A. **(0,5 pt)**
3. Calculer la probabilité de B. **(1 pt)**
4. Calculer la probabilité de C. **(1 pt)**

4. Montrer que $Kerf$ et Imf sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$. **(1 pt)**
5. On donne $\vec{u}_1 = (1;1;1)$, $\vec{u}_2 = (-1;1;0)$ et $\vec{u}_3 = (-1;0;1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
   a) Montrer que $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$. **(0.5 pt)**
   b) Déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$. **(0.5 pt)**

Exercice 3 : (07 points)

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = 1 + x - ln|e^x - e|$.
Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition E_f de f. **(0,5 pt)**
2. a) Montrer que : $f(x) = 1 - ln|1 - e^{1-x}|$, $\forall x \in E_f$. **(0.5pt)**
   b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. **(0,5 pt)**
3. a) Monter que : $\forall x \in E_f$, $f'(x) = \dfrac{-1}{e^{x-1} - 1}$. **(0.5pt)**
   b) Dresser le tableau de signe de f' sur E_f. **(0.5pt)**
   c) Dresser le tableau de variation de f sur E_f. **(0.5pt)**
   On donne : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
4. a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ en $-\infty$. **(0.5pt)**
   b) Montrer qu'il existe un réel unique α appartenant à l'intervalle $]-1;0[$ tel que $f(\alpha) = 0$. **(0.5pt)**
   c) Le point $A(1 + ln2; 1 + ln2)$ appartient à la courbe $(\mathscr{C})$. Construire la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (D). **(1pt)**
5. Soit g la restriction de f sur $I =]1;+\infty[$.
   a) Tracer la courbe $(\mathscr{C}')$ de g^{-1}, la bijection réciproque de g sur I. **(0,5pt)**
   b) Déterminer l'expression analytique de g^{-1}. **(0.5pt)**
6. a) Calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{-e^{1-x}}{1 - e^{1-x}} dx$. **(0,5pt)**
   b) Donner une interprétation graphique de cette intégrale. **(0,5pt)**

Exercice 4 : (03 points)

Dans un jeu de 32 cartes bien battues, on a 4 familles "trèfle" et "pique", de couleur noire, "carreau" et "cœur" de couleur rouge. Chaque famille contient trois "figures" : Dame, Roi et valet. On tire au hasard et d'une seule main deux cartes de ce jeu et on considère les évènements suivants :

A : "les deux cartes sont de la même famille" ;
B :" les deux cartes sont pique et roi de "trèfle" et de "cœur" respectivement ;
C : " tirer des cartes de couleurs différentes"

1. Calculer le nombre de tirages possibles de deux cartes de ce jeu. **(0,5 pt)**
2. Calculer la probabilité de A. **(0,5 pt)**
3. Calculer la probabilité de B. **(1 pt)**
4. Calculer la probabilité de C. **(1 pt)**

INSPECTION DES LYCÉES D'ENSEIGNEMENT GÉNÉRAL **Année scolaire 2023-2024**
ZONE 4 KOUILOU ET POINTE-NOIRE
DÉPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES

CORRIGE DE LA COMPOSITION DU 2ème TRIMESTRE

Épreuve : Mathématiques
Niveau : Terminale
Série : D

Exercice 1 :(5 points)

$P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4$

1. (a) **Déterminons deux nombres complexes a et b**

$p(z) = (z-1)(z-2-2i)(az+b) = az^3 + (3-3a-2ai)z^2 + (2a+2ai-3b-2ib)z + (2+2i)b$

Par identification on a : $\begin{cases} a = 1 \\ b(2+2i) = -4 \\ b - 3a - 2ai = -4 - i \\ 2a - 3b + (2a-2b)i = 7 + i \end{cases}$ D'où $\boxed{a = 1 \text{ et } b = -1+i}$ **(1pt)**

(b) **Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$**

$P(z) = 0 \Longrightarrow (z-1)(z-2-2i)(z-1+i) = 0$. D'où $\boxed{S = \{1; 2+2i; 1-i\}}$ **(0,5pt)**

2. $z_A = 1$; $z_B = 2+2i$; $z_C = 1-i$ et $u = \dfrac{2+2i}{1-i}$

(a) **Donnons la forme trigonométrique de u.**

$u = \dfrac{2+2i}{1-i} \Longrightarrow u = 2i$. On a : $|u| = 2i$ et $Arg(u) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ Donc $\boxed{u = 2(\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2})}$ **(0,5pt)**

(b) **Déduisons la nature du triangle OBC**

$|u| = 1$ et $Arg(u) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ alors OBC est un triangle rectangle en O.**(0,5pt)**

(c) **Déterminons l'affixe du point E**

ABCE est un parallélogramme si et seulement si : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$ D'où $\boxed{z_E = 2+i}$ **(0,5pt)**

3. **Démontrons que l'ensemble (C) des points M(z) est un cercle inscrit au triangle OBC**

$|z_O - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i| = \frac{\sqrt{10}}{2}$, $|z_B - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i| = \frac{\sqrt{10}}{2}$ et $|z_C - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i| = \frac{\sqrt{10}}{2}$ O,B et C Vérifient l'équation donc (C) est le cercle circonscrit au triangle OBC. **(0,5pt)**

4. $\begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = -x + y + 2 \end{cases}$

(a) **Montrons que l'écriture complexe de f est $z' = (1-i)z - 1 + 2i$**

$\begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = -x + y + 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x' = x + y - 1 \\ iy' = -ix + iy + 2i \end{cases}$

En faisant la somme membre à membre dans ce système d'équations, et en posant $z = x+iy$ et $z' = x' + iy'$, on obtient le résultat : $\boxed{z' = (1-i)z - 1 + 2i}$ **(0,5pt)**

INSPECTION DES LYCÉES D'ENSEIGNEMENT GÉNÉRAL **Année scolaire 2023-2024**

ZONE 4 KOUILOU ET POINTE-NOIRE

DÉPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES

CORRIGE DE LA COMPOSITION DU 2ème TRIMESTRE

Épreuve : Mathématiques
Niveau : Terminale
Série : D

Exercice 1 :(5 points)

$P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4$

1. (a) **Déterminons deux nombres complexes a et b**

$p(z) = (z-1)(z-2-2i)(az+b) = az^3 + (3-3a-2ai)z^2 + (2a+2ai-3b-2ib)z + (2+2i)b$

Par identification on a : $\begin{cases} a = 1 \\ b(2+2i) = -4 \\ b - 3a - 2ai = -4 - i \\ 2a - 3b + (2a-2b)i = 7 + i \end{cases}$ D'où $\boxed{a = 1 \text{ et } b = -1+i}$ **(1pt)**

(b) **Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$**

$P(z) = 0 \Longrightarrow (z-1)(z-2-2i)(z-1+i) = 0$. D'où $\boxed{S = \{1; 2+2i; 1-i\}}$ **(0,5pt)**

2. $z_A = 1$; $z_B = 2+2i$; $z_C = 1-i$ et $u = \dfrac{2+2i}{1-i}$

(a) **Donnons la forme trigonométrique de u.**

$u = \dfrac{2+2i}{1-i} \Longrightarrow u = 2i$. On a : $|u| = 2i$ et $Arg(u) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ Donc $\boxed{u = 2(\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2})}$ **(0,5pt)**

(b) **Déduisons la nature du triangle OBC**

$|u| = 1$ et $Arg(u) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ alors OBC est un triangle rectangle en O.**(0,5pt)**

(c) **Déterminons l'affixe du point E**

ABCE est un parallélogramme si et seulement si : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$ D'où $\boxed{z_E = 2+i}$ **(0,5pt)**

3. **Démontrons que l'ensemble (C) des points M(z) est un cercle inscrit au triangle OBC**

$|z_O - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i| = \frac{\sqrt{10}}{2}$, $|z_B - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i| = \frac{\sqrt{10}}{2}$ et $|z_C - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i| = \frac{\sqrt{10}}{2}$ O,B et C Vérifient l'équation donc (C) est le cercle circonscrit au triangle OBC. **(0,5pt)**

4. $\begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = -x + y + 2 \end{cases}$

(a) **Montrons que l'écriture complexe de f est $z' = (1-i)z - 1 + 2i$**

$\begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = -x + y + 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x' = x + y - 1 \\ iy' = -ix + iy + 2i \end{cases}$.

En faisant la somme membre à membre dans ce système d'équations, et en posant $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, on obtient le résultat : $\boxed{z' = (1-i)z - 1 + 2i}$ **(0,5pt)**

(b) **Nature de f**

$a = 1 - i$, $|a| = \sqrt{2} \neq 1$ alors f est une similitude plane directe . **(0,5pt)**

(c) **Déterminons l'affixe de D**

$f(D) = O \Longrightarrow z_D = (1-i)z_O - 1 + 2i$ D'où $\boxed{z_D = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i}$ **(0,5pt)**

Exercice 2 :(5 points)

$B = (\vec{i}, \vec{j})$, $f(\vec{i}) = 3\vec{j} - 6\vec{j}$ et $f(3\vec{i} - 6\vec{j}) = f(\vec{i})$

1. (a) **Déterminons $f(\vec{i})$**

$f(3\vec{i} - 6\vec{j}) = f(\vec{i})$ D'où $\boxed{f(\vec{i}) = \vec{i} - 2\vec{j}}$ **(0,5pt)**

(b) **Écrivons la matrice M_f dans la base B**

$\boxed{M_f = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}}$ **(0,5pt)**

2. (a) **Montrons que f est une projection vectorielle.**

f est une projection vectorielle si et seulement si $f \circ f = f$ ou $M_f \times M_f = M_f$

(b) **Nature de f**

$a = 1 - i$, $|a| = \sqrt{2} \neq 1$ alors f est une similitude plane directe . **(0,5pt)**

(c) **Déterminons l'affixe de D**

$f(D) = O \Longrightarrow z_D = (1-i)z_O - 1 + 2i$ D'où $\boxed{z_D = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i}$ **(0,5pt)**

Exercice 2 :(5 points)

$B = (\vec{i}, \vec{j})$, $f(\vec{i}) = 3\vec{j} - 6\vec{j}$ et $f(3\vec{i} - 6\vec{j}) = f(\vec{i})$

1. (a) **Déterminons $f(\vec{i})$**

$f(3\vec{i} - 6\vec{j}) = f(\vec{i})$ D'où $\boxed{f(\vec{i}) = \vec{i} - 2\vec{j}}$ **(0,5pt)**

(b) **Écrivons la matrice M_f dans la base B**

$$\boxed{M_f = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}}$$ **(0,5pt)**

2. (a) **Montrons que f est une projection vectorielle.**

f est une projection vectorielle si et seulement si $f \circ f = f$ ou $M_f \times M_f = M_f$.

1

$1^{ère}$ Variante :

- $(f \circ f)(\vec{i}) = f(3\vec{i} - 6\vec{j} = 3f(\vec{i}) - 6f(\vec{j}) = f(\vec{i}) \Longrightarrow (f \circ f)(\vec{i}) = f(\vec{i})$
- $(f \circ f)(\vec{j}) = f(\vec{i} - 2\vec{j} = f(\vec{i}) - 2f(\vec{j}) = f(\vec{j}) \Longrightarrow (f \circ f)(\vec{j}) = f(\vec{j})$

$2^{ème}$ Variante :

$$M_f \times M_f = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow M_f \times M_f = M_f.$$

Donc f est une projection vectorielle.**(0,5pt)**

(b) **Déterminons sa base et sa direction**

Base : $Inv(f) = \{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = \vec{u}\}$

$$\begin{cases} 3x + y = x \\ -6x - 2y = y \end{cases} \Longrightarrow 2x + y = 0.$$

La bases de f est la droite vectorielle d'équation $2x + y = 0$ engendré par sa base $\vec{e}_1 = -\vec{i} + 2\vec{j}$**(0,5pt)**

Direction : $Kerf(f) = \{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = \vec{0}\}$

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ -6x - 2y = 0 \end{cases} \Longrightarrow 3x + y = 0.$$

La bases de f est la droite vectorielle d'équation $3x + y = 0$ engendré par sa base $\vec{e}_2 = -\vec{i} + 3\vec{j}$**(0,5pt)**

3. (a) **Montrons que $(\vec{u}; \vec{v})$ est une base**

$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ alors $(\vec{u}; \vec{v})$ est une base de E **(0,5pt)**

(b) **Nature de f**

$a = 1 - i$, $|a| = \sqrt{2} \neq 1$ alors f est une similitude plane directe . **(0,5pt)**

(c) **Déterminons l'affixe de D**

$f(D) = O \Longrightarrow z_D = (1-i)z_O - 1 + 2i$ D'où $\boxed{z_D = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i}$ **(0,5pt)**

Exercice 2 :(5 points)

$B = (\vec{i}, \vec{j})$, $f(\vec{i}) = 3\vec{j} - 6\vec{j}$ et $f(3\vec{i} - 6\vec{j}) = f(\vec{i})$

1. (a) **Déterminons $f(\vec{i})$**

$f(3\vec{i} - 6\vec{j}) = f(\vec{i})$ D'où $\boxed{f(\vec{i}) = \vec{i} - 2\vec{j}}$ **(0,5pt)**

(b) **Écrivons la matrice M_f dans la base B**

$$\boxed{M_f = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}}$$ **(0,5pt)**

2. (a) **Montrons que f est une projection vectorielle.**

f est une projection vectorielle si et seulement si $f \circ f = f$ ou $M_f \times M_f = M_f$.

1ère Variante :

- $(f \circ f)(\vec{i}) = f(3\vec{i} - 6\vec{j} = 3f(\vec{i}) - 6f(\vec{j}) = f(\vec{i}) \Longrightarrow (f \circ f)(\vec{i}) = f(\vec{i})$
- $(f \circ f)(\vec{j}) = f(\vec{i} - 2\vec{j} = f(\vec{i}) - 2f(\vec{j}) = f(\vec{j}) \Longrightarrow (f \circ f)(\vec{j}) = f(\vec{j})$

2ème Variante :

$$M_f \times M_f = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow M_f \times M_f = M_f.$$

Donc f est une projection vectorielle.**(0,5pt)**

(b) **Déterminons sa base et sa direction**

Base : $Inv(f) = \{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = \vec{u}\}$

$$\begin{cases} 3x + y = x \\ -6x - 2y = y \end{cases} \Longrightarrow 2x + y = 0.$$

La bases de f est la droite vectorielle d'équation $2x + y = 0$ engendré par sa base $\vec{e}_1 = -\vec{i} + 2\vec{j}$**(0,5pt)**

Direction : $Kerf(f) = \{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = \vec{0}\}$

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ -6x - 2y = 0 \end{cases} \Longrightarrow 3x + y = 0.$$

La bases de f est la droite vectorielle d'équation $3x + y = 0$ engendré par sa base $\vec{e}_2 = -\vec{i} + 3\vec{j}$**(0,5pt)**

3. (a) **Montrons que $(\vec{u}; \vec{v})$ est une base**

$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ alors $(\vec{u}; \vec{v})$ est une base de E **(0,5pt)**

(b) **Déterminons les équations de F et G**

$\boxed{(\text{G}) : 2x + y = 0 \text{ et } (\text{F}) : 3x + y = 0}$ **(0,5pt+0,5pt)**

(c) **Montrons que F et G sont supplémentaires**

$F \cap G = \{\vec{0}_E\}$ car $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \Longrightarrow x = y = 0$

$\dim F + \dim G = \dim E$. Alors F et G sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires de E. **(0,5pt)**

(d) **Matrice de f dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$**

$$\begin{cases} f(\vec{u}) = f(\vec{i}) - 2f(\vec{j}) \\ f(\vec{v}) = -f(\vec{i}) + 3f(\vec{j}) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(\vec{u}) = \vec{u} \\ f(\vec{v}) = \vec{0} \end{cases} \text{ D'où } \boxed{M_f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$ **(0,5pt)**

Exercice 3 :(7 points)

$$\begin{cases} f(x) = -e^{\frac{1}{x}} + 1, \text{ si } x < 0 \\ f(x) = x + 1 - \ln(1 + x), \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

(b) **Déterminons les équations de F et G**

$\boxed{(G) : 2x + y = 0 \text{ et } (F) : 3x + y = 0}$ **(0,5pt+0,5pt)**

(c) **Montrons que F et G sont supplémentaires**

$F \cap G = \{\vec{0}_E\}$ car $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \Longrightarrow x = y = 0$

$\dim F + \dim G = \dim E$. Alors F et G sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires de E. **(0,5pt)**

(d) **Matrice de f dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$**

$\begin{cases} f(\vec{u}) = f(\vec{i}) - 2f(\vec{j}) \\ f(\vec{v}) = -f(\vec{i}) + 3f(\vec{j}) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(\vec{u}) = \vec{u} \\ f(\vec{v}) = \vec{0} \end{cases}$ D'où $\boxed{M_f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$ **(0,5pt)**

Exercice 3 :(7 points)

$\begin{cases} f(x) = -e^{\frac{1}{x}} + 1, \text{ si } x < 0 \\ f(x) = x + 1 - \ln(1+x), \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

1. **Calculons la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$**

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-e^{\frac{1}{x}}) = 0$ D'où $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$ **(0,5pt)**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [x + 1 - \ln(x+1)] = +\infty$ D'où $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ **(0,5pt)**

2. (a) **Continuité de f en $x_0 = 0$**

$\begin{cases} f(0) = 1 \\ \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 1 \end{cases}$

Comme $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = f(0)$ alors f est continue en $x_0 = 0$.**(0,5pt)**

(b) **Dérivabilité de f en x_0 :**

- $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{-e^{\frac{1}{x}} + 1 - 1}{x} = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{-e^{\frac{1}{x}}}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x + 1 - \ln(x+1) - 1}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x - \ln(x+1)}{x} = 0$

On a : $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 0$ alors f est dérivable en $x_0 = 0$.**(0,5pt)**

(c) **Donnons une interprétation graphique**

Comme f est dérivable en $x_0 = 0$ alors sa courbe représentative (C) admet une tangente horizontale d'équation $y = 1$.**(0,5pt)**

3. **Calculons la dérivée $f'(x)$ suivant les valeurs de x**

$\begin{cases} \\ -6x-2y=0 \end{cases} \Longrightarrow 3x+y=0.$

La bases de f est la droite vectorielle d'équation $3x+y=0$ engendré par sa base $\vec{e}_2 = -\vec{i}+3\vec{j}$**(0,5pt)**

3. (a) **Montrons que $(\vec{u};\vec{v})$ est une base**

$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ alors $(\vec{u};\vec{v})$ est une base de E **(0,5pt)**

(b) **Déterminons les équations de F et G**

$\boxed{(G) : 2x+y=0 \text{ et } (F) : 3x+y=0}$ **(0,5pt+0,5pt)**

(c) **Montrons que F et G sont supplémentaires**

$F \cap G = \{\vec{0}_E\}$ car $\begin{cases} 2x+y=0 \\ 3x+y=0 \end{cases} \Longrightarrow x=y=0$

$\dim F + \dim G = \dim E$. Alors F et G sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires de E. **(0,5pt)**

(d) **Matrice de f dans la base $(\vec{u},\vec{v})$**

$\begin{cases} f(\vec{u}) = f(\vec{i}) - 2f(\vec{j}) \\ f(\vec{v}) = -f(\vec{i}) + 3f(\vec{j}) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(\vec{u}) = \vec{u} \\ f(\vec{v}) = \vec{0} \end{cases}$ D'où $\boxed{M_f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$ **(0,5pt)**

Exercice 3 :(7 points)

$\begin{cases} f(x) = -e^{\frac{1}{x}} + 1, \text{ si } x < 0 \\ f(x) = x + 1 - \ln(1+x), \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

1. **Calculons la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-e^{\frac{1}{x}}) = 0$ D'où $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0}$ **(0,5pt)**

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} [x + 1 - \ln(x+1)] = +\infty$ D'où $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$ **(0,5pt)**

2. (a) **Continuité de f en $x_0 = 0$**

$\begin{cases} f(0) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 \end{cases}$

Comme $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$ alors f est continue en $x_0 = 0$.**(0,5pt)**

(b) **Dérivabilité de f en x_0 :**

- $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-e^{\frac{1}{x}} + 1 - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-e^{\frac{1}{x}}}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x + 1 - \ln(x+1) - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - \ln(x+1)}{x} = 0$

On a : $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 0$ alors f est dérivable en $x_0 = 0$.**(0,5pt)**

(c) **Donnons une interprétation graphique**

Comme f est dérivable en $x_0 = 0$ alors sa courbe représentative (C) admet une tangente horizontale d'équation $y = 1$.**(0,5pt)**

3. **Calculons la dérivée $f'(x)$ suivant les valeurs de x**

$\boxed{\begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}, \text{ si } x < 0 \\ f(x) = \dfrac{x}{x+1}, \text{ si } x \geq 0 \end{cases}}$ **(1pt)**

Signe de $f'(x)$:

Pour tout $x \in]-\infty; +\infty[$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante.

4. **Dressons le tableau de variation de f**

$$\boxed{\begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}, \text{ si } x < 0 \\ f(x) = \dfrac{x}{x+1}, \text{ si } x \geq 0 \end{cases}}$$ **(1pt)**

Signe de $f'(x)$:

Pour tout $x \in]-\infty; +\infty[$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante.

4. **Dressons le tableau de variation de f**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f '(x)		+	0 ‖ 0	+	
f(x)	0	↗	1	↗	$+\infty$

(0,5pt)

5. **Montrons que le point d'abscisse $x_0 = 0$ est un point d'inflexion**

On constate qu'en $x_0 = 0$, f' s'annule sans changer de signe alors la courbe (C) admet un point d'inflexion.**(0,5pt)**

6. (a) **Études les branches infinies**

► $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ alors la courbe (C) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$ **(0,5pt)**

► $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ existence d'une branche infinie

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 1 - \ln(x+1)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \ln(x+1) = +\infty$

Alors (C) admet une direction asymptotique d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$**(0,5pt)**

(b) **Étudions la position de (C) par rapport à la droite d'équation $y = x$**

$f(x) - y = 1 + \ln(x+1)$. Posons $f(x) - y = 0 \Rightarrow 1 - \ln(x+1) = 0 \Rightarrow x = e^{-1} - 1 \Rightarrow x = e - 1$

x	0		e-1		$+\infty$
f(x)-y		+	0	-	

► $\forall x \in [0; e-1[$, (C) est au dessus de la droite (D).

► $\forall x \in]e-1; +\infty[$, (C) est au dessous de la droite (D) **(0,5pt)**.

► Pour $x = e - 1$, (C) et (D) sont confondues.

(c) **Traçons la courbe de f**

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}, \text{ si } x < 0 \\ f(x) = \dfrac{x}{x+1}, \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$ **(1pt)**

Signe de $f'(x)$:

Pour tout $x \in]-\infty; +\infty[$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante.

4. **Dressons le tableau de variation de f**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		+	0 | 0	+	
f(x)	0	↗	1	↗	$+\infty$

(0,5pt)

5. **Montrons que le point d'abscisse $x_0 = 0$ est un point d'inflexion**

On constate qu'en $x_0 = 0$, f' s'annule sans changer de signe alors la courbe (C) admet un point d'inflexion.**(0,5pt)**

6. (a) **Étudions les branches infinies**

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ alors la courbe (C) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$ **(0,5pt)**
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ existence d'une branche infinie
  - $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + 1 - \ln(x+1)}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x} - \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$
  - $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} 1 - \ln(x+1) = +\infty$

  Alors (C) admet une direction asymptotique d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$**(0,5pt)**

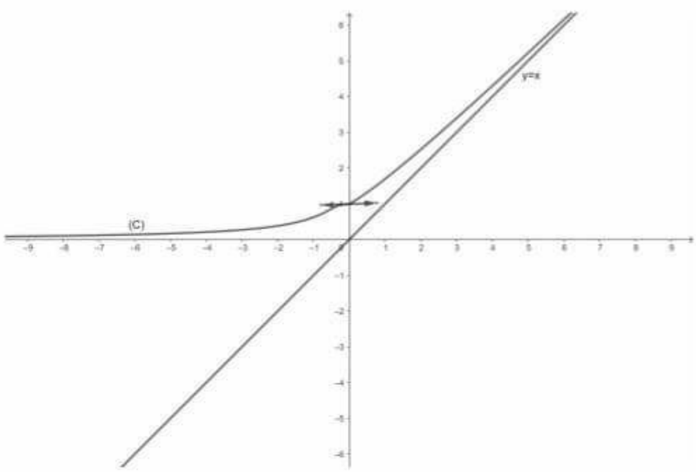
(b) **Étudions la position de (C) par rapport à la droite d'équation $y = x$**

$f(x) - y = 1 + \ln(x+1)$. Posons $f(x) - y = 0 \Rightarrow 1 - \ln(x+1) = 0 \Rightarrow x = e^{-1} - 1 \Rightarrow x = e - 1$

x	0		e-1		$+\infty$
f(x)-y		+	0	-	

- $\forall x \in [0; e-1[$, (C) est au dessus de la droite (D).
- $\forall x \in]e-1; +\infty[$, (C) est au dessous de la droite (D) **(0,5pt)**.
- Pour $x = e - 1$, (C) et (D) sont confondues.

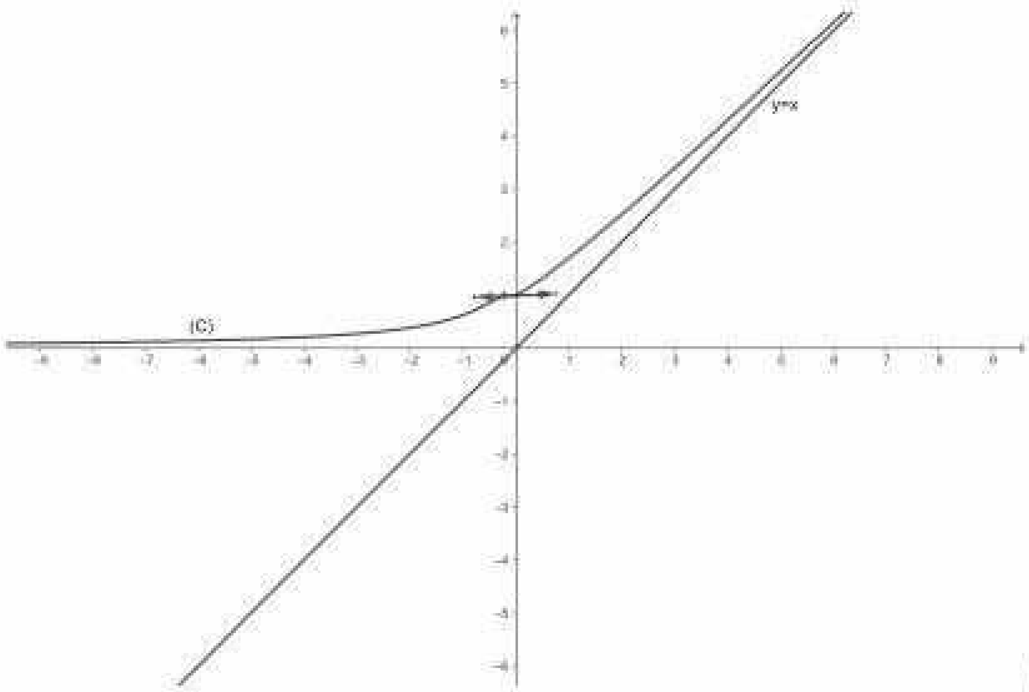
(c) **Traçons la courbe de f**



(1pt)

Exercice 1 :(3 points)

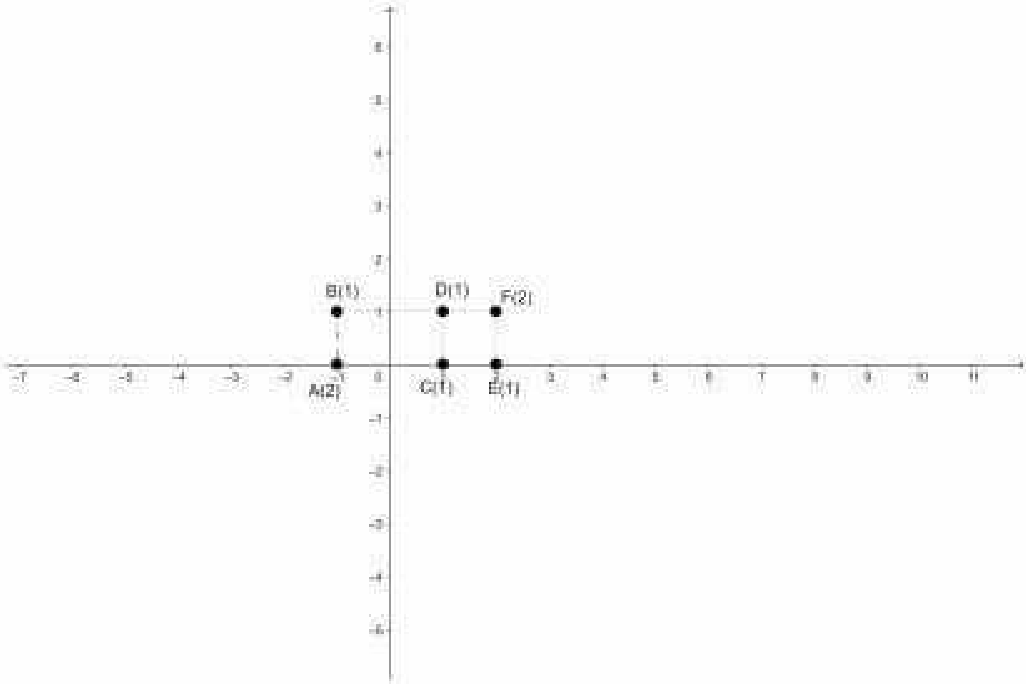
1. **Représentons les points**



(1pt)

Exercice 1 :(3 points)

1. **Représentons les points**

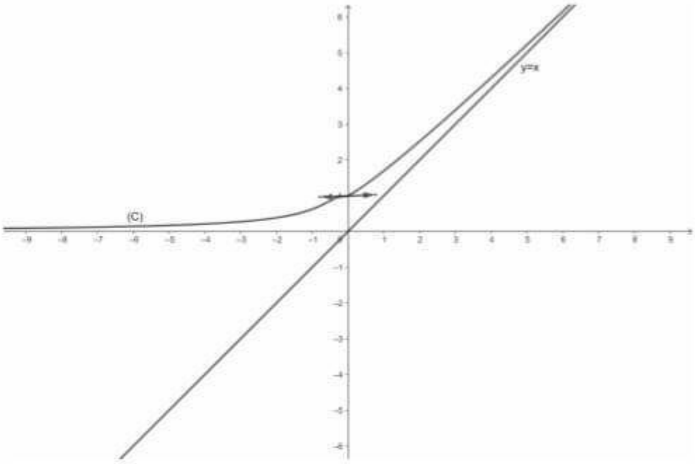


(1pt)

2. **Dressons le tableau non linéaire**

y_j \ x_i	-1	1	2
0	2	1	1
1	1	1	2

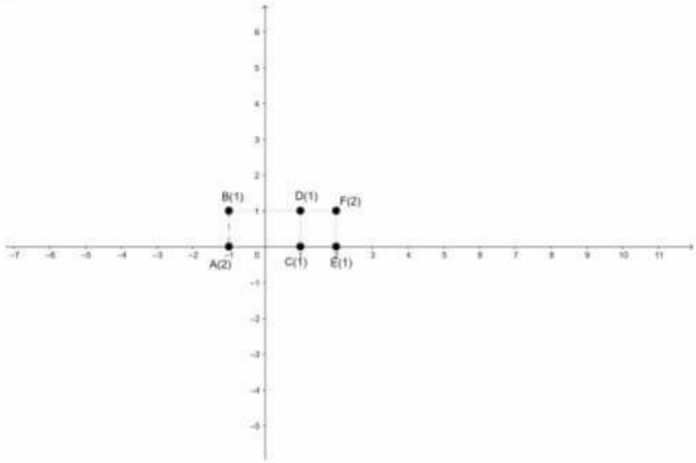
(0,5pt)



(1pt)

Exercice 1 :(3 points)

1. **Représentons les points**



(1pt)

2. **Dressons le tableau non linéaire**

y_j \ x_i	-1	1	2
0	2	1	1
1	1	1	2

(0,5pt)

3. **Lois marginale**

▶ **Loi marginale de X**

x_i	-1	1	2
n_i	3	2	3

(0,5pt)

▶ **Loi marginale de Y**

y_j	0	1
n_j	4	4

(0,5pt)

4. **Inertie minimale**

$I_G = N[V(X) + V(Y)]$

- Cherchons $\overline{X}$ et $\overline{Y}$.

  $\overline{X} = \frac{5}{8}$ et $\overline{Y} = \frac{1}{2}$

- Cherchons $V(X)$ et $V(y)$.

  $V(X) = \frac{95}{64}$ et $V(Y) = \frac{1}{4}$

Ainsi $\boxed{I_G = \frac{127}{8}}$ (0,5pt)

3. **Lois marginale**

▶ **Loi marginale de X**

x_i	-1	1	2
n_i	3	2	3

(0,5pt)

▶ **Loi marginale de Y**

y_j	0	1
n_j	4	4

(0,5pt)

4. **Inertie minimale**

$I_G = N[V(X) + V(Y)]$

- Cherchons $\overline{X}$ et $\overline{Y}$.

  $\overline{X} = \frac{5}{8}$ et $\overline{Y} = \frac{1}{2}$

- Cherchons $V(X)$ et $V(y)$.

  $V(X) = \frac{95}{64}$ et $V(Y) = \frac{1}{4}$

Ainsi $\boxed{I_G = \frac{127}{8}}$ **(0,5pt)**

(1pt)

2. **Dressons le tableau non linéaire**

y_j \ x_i	-1	1	2
0	2	1	1
1	1	1	2

(0,5pt)

3. **Lois marginale**

- **Loi marginale de X**

x_i	-1	1	2
n_i	3	2	3

(0,5pt)

- **Loi marginale de Y**

y_j	0	1
n_j	4	4

(0,5pt)

4. **Inertie minimale**

$I_G = N[V(X) + V(Y)]$

- Cherchons $\overline{X}$ et $\overline{Y}$.

$\overline{X} = \frac{5}{8}$ et $\overline{Y} = \frac{1}{2}$

- Cherchons $V(X)$ et $V(y)$.

$V(X) = \frac{95}{64}$ et $V(Y) = \frac{1}{4}$

Ainsi $\boxed{I_G = \frac{127}{8}}$ **(0,5pt)**