**Partie B**

On définit la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 2(3x-1)e^{-2x} + 2 \text{ si } x \leq 0 \\ \dfrac{x \ln x}{1+x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$

On note $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Unité graphique : 4 cm.

**I) Etude d'une fonction auxiliaire**

On définit la fonction $g$ sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 1 + x + \ln x$.

1)

a) Calculer les limites de $g$ en 0 et en $+\infty$.

b) Déterminer le sens de variations de $g$.

c) Dresser le tableau de variations de $g$.

2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans $]0;+\infty[$. Montrer que $\alpha$ appartient à l'intervalle $]0,2;0,3[$.

3) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de $x$.

**II) Etude et représentation graphique de $f$.**

1) Etudier la continuité de $f$ en 0.

2) Etudier la dérivabilité de $f$ en 0. Donner une interprétation graphique.

3) Etudier les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

4) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat obtenu.

5) Etudier le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.

(On montrera que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$)

6) Montrer que $f(\alpha) = -\alpha$ et déterminer le point d'intersection de $(C_f)$ avec l'axe $(Ox)$.

7) Dresser le tableau de variations de $f$.

8) Construire $(C_f)$.

**Partie C**

Soit $\lambda < 0$. On note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan délimitée par les droites d'équations : $x = \lambda$, $x = 0$, $y = 0$ et la courbe $(C_f)$.

1) On pose $F(x) = (ax+b)\,e^{-2x}$. Déterminer $a$ et $b$ pour que $F'(x) = (3x-1)\,e^{-2x}$.

2) Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$ en $\text{cm}^2$.

3) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

On donne : $\ln 2 = 0,70$ ; $\ln 3 = 1,10$ ; $\ln 5 = 1,61$.

*Fin*

On définit la fonction sur $\mathbb{R}$ par (1)

$$f(x) = \begin{cases} 2(3x-1)e^{-2x}+2 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x\ln x}{1+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On note $(\mathscr{C}f)$ la courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité graphique 4 cm

<u>Montrons que $Df = \mathbb{R}$</u>

Posons $f_1(x) = 2(3x-1)e^{-2x}+2$ si $x \leq 0$

$f_1(x)$ existe $\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \in ]-\infty, 0] \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \cap ]-\infty, 0] = ]-\infty, 0]$

Donc $Df_1 = ]-\infty, 0]$

Posons $f_2(x) = \dfrac{x\ln x}{1+x}$, si $x > 0$

$f_2(x)$ existe $\Leftrightarrow \begin{cases} 1+x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases}$

$1+x \neq 0 \iff x \neq -1 \iff x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ 2

$\iff x \in ]-\infty,-1[ \cup ]-1,+\infty[$

$x > 0 \iff x \in ]0,+\infty[$

D'ou $\begin{cases} 1+x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in ]-\infty,-1[ \cup ]-1,+\infty[ \\ x \in ]0,+\infty[ \end{cases}$

$\iff x \in (]-\infty,-1[ \cup ]-1,+\infty[) \cap (]0,+\infty[)$

Comme $]0,+\infty[ \subset ]-\infty,-1[ \cup ]-1,+\infty[$ alors,

$(]-\infty,-1[ \cup ]-1,+\infty[) \cap (]0,+\infty[) = ]0,+\infty[$

d'ou $\mathcal{D}f_2 = ]0,+\infty[$

Donc $\mathcal{D}f = \mathcal{D}f_1 \cup \mathcal{D}f_2 = ]-\infty,0] \cup ]0,+\infty[$

$= ]-\infty,+\infty[ = \mathbb{R}$

Donc $\boxed{\mathcal{D}f = \mathbb{R}}$

## I°) Étude d'une fonction auxiliaire

On définit la fonction $g$ sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = 1 + x + \ln x$

### a°) Calculons les limites de $g$ en $0$ et en $+\infty$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} (1 + x + \ln x) = 1 + 0 - \infty = -\infty$$

Donc $\boxed{\lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty}$.

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (1 + x + \ln x) = 1 + \infty + \infty = +\infty$$

Donc $\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$

### b°) Déterminons le sens de variations de $g$

La fonction $x \longmapsto 1 + x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

La fonction $x \longmapsto \ln x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

Alors la fonction $x \longmapsto g(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonction dérivable sur $]0,+\infty[$

$$g'(x) = (1+x+\ln x)' = 1+\frac{1}{x}$$

4

d'ou $\boxed{g'(x) = 1+\frac{1}{x}}$

$\forall x \in ]0,+\infty[$ , $1+\frac{1}{x} > 0$ alors $g'(x) > 0$

d'ou $g$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | | $+$ | | |
| $g$ | | $-\infty$ - - - - | $0$ | + + + + + + | $+\infty$ |

2°) Montrons que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique $\alpha$ dans $]0,+\infty[$.

La fonction $g$ est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$, alors elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ dans $f(]0,+\infty[) = ]-\infty,+\infty[$

Comme $0 \in ]-\infty, +\infty[$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $]0, +\infty[$

Montrons que $\alpha$ appartient à l'intervalle $]0,2 ; 0,3[$

$g(0,2) = 1 + 0,2 + \ln(0,2) = -0,409$ 5

$g(0,3) = 1 + 0,3 + \ln(0,3) = 0,96$

Alors $g(0,2) \times g(0,3) = -0,409 \times 0,96 < 0$

Donc $\alpha$ appartient à l'intervalle $]0,2 ; 0,3[$

3°) <u>Déduisons le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de $x$</u>

En regardant le tableau de variation de $g$, on constate que $g$ est négative entre $0$ et $\alpha$ et positive entre $\alpha$ et $+\infty$

II°) <u>Etude et représentation graphique de $f$</u>

1°) <u>Etudions la continuité de $f$ en $0$</u>

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left[ 2(3x-1)e^{-2x} + 2 \right] = -2+2 = 0$$

6

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left( \frac{x \ln x}{1+x} \right) = ?$$

Comme $\lim_{x \to 0^+} (x \ln x) = 0$ et $\lim_{x \to 0^+} (1+x) = 1$

alors $\lim_{x \to 0^+} \left( \frac{x \ln x}{1+x} \right) = \frac{0}{1} = 0$

D'où $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

$$f(0) = 2(3 \times 0 - 1)e^0 + 2 = 2-2 = 0.$$

Comme $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$, donc $f$ est continue en 0

2°) <u>Etudions la dérivabilité de $f$ en 0.</u>

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \left( \frac{2(3x-1)e^{-2x} + 2 - 0}{x - 0} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \left( \frac{2(3x-1)e^{-2x} + 2}{x} \right) = \frac{-2+2}{0} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \text{ FI}$$

(7)

... Levons l'indétermination

Posons $X = -2x$, alors $6x = -3X$, $x = \frac{-X}{2}$

Si $x \to 0$ alors $X \to 0$

$$\frac{2(3x-1)e^{-2x} + 2}{x} = \frac{6xe^{-2x} - 2e^{-2x} + 2}{x}$$

$$= \frac{-3Xe^{X} - 2e^{X} + 2}{\frac{-X}{2}} = \frac{6Xe^{X} + 4e^{X} - 4}{X}$$

$$= \frac{6Xe^{X}}{X} + \frac{4e^{X} - 4}{X} = 6e^{X} + 4\left(\frac{e^{X} - 1}{X}\right)$$

$$\lim_{X \to 0^-} \left[ 6e^{X} + 4\left(\frac{e^{X} - 1}{X}\right) \right] = ?$$

Comme $\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{e^{X} - 1}{X}\right) = 1$ (limite usuelle)

$$\lim_{X \to 0^-} e^{X} = e^{0} = 1$$

Alors $\lim\limits_{x \to 0^-} \left[ 6e^x + 4\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) \right] = 6 + 4 = 10$

8

Donc $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 10$

Alors alors $f$ est dérivable à gauche en $0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \left( \frac{\frac{x \ln x}{1+x} - 0}{x - 0} \right)$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \left[ \frac{x \ln x}{x(1+x)} \right] = \lim\limits_{x \to 0^+} \left[ \frac{\ln(x)}{1+x} \right] = \frac{-\infty}{1} = -\infty$

Si ou $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[ \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right] = -\infty$

Donc $f$ n'est pas dérivable à droite en $0$

La fonction $f$ est dérivable à gauche en $0$ mais n'est pas dérivable à droite en $0$, donc $f$ n'est pas dérivable en $0$

Par la croissance comparée en $+\infty$ la fonction $\ln$ est négligeable devant la fonction puissance. (11)

Alors calculer $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x+1}\right)$ est équivalent à

calculer $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{c}{x+1}\right)$ avec $c$ une constante

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{c}{x+1}\right) = \dfrac{c}{+\infty} = 0$, on en déduit

que $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x+1}\right) = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 0$

Donc $(C_f)$ admet une branche parabolique de direction $(0, x)$ au voisinage de $+\infty$

5°) Etudions le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$ :

Pour $x \leq 0$, $f(x) = 2(3x-1)e^{-2x} + 2$ si $x<0$

La fonction $x \longmapsto (3x-1)e^{-2x}$ est dérivable

sur $]-\infty, 0]$

Donc $f$ admet une demi tangente oblique de coefficient directeur 10 à gauche en 0 et une demi tangente verticale à droite en 0

9

3°) Etudions les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left[2(3x-1)e^{-2x} + 2\right] = ?$$

Posons $X = -2x$, si $x \to -\infty$ alors $X \to +\infty$

alors $\lim_{X \to +\infty} (e^X) = +\infty$, d'ou $\lim_{x \to -\infty} (e^{-2x}) = +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} (3x-1) = -\infty$$

D'où $\lim_{x \to -\infty} \left[2(3x-1)e^{-2x} + 2\right] = 2 \times -\infty \times +\infty + 2$

$= -\infty$

Donc $\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left( \frac{x \ln x}{x+1} \right) = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ "FI"}$$

10

Levons l'indetermination

$$\frac{x \ln x}{x+1} = \frac{x \ln x}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{\ln x}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left( \frac{\ln x}{1 + \frac{1}{x}} \right) = \frac{+\infty}{1+0} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

Donc $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

4°) <u>Calculons</u> $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ <u>et intepretons le résultat obtenu</u>

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left( \frac{\frac{x \ln x}{1+x}}{x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x \ln x}{x(1+x)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{1+x} = ?$$

Alors la fonction $x \longmapsto f(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme rapport de fonction dérivable sur $]0,+\infty[$.

$$f'(x) = \left(\frac{x\ln x}{1+x}\right)'$$

Posons $u = x\ln x$ , $u' = \ln x + 1$

$v = 1+x$ , $v' = 1$

$$f' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{(1+x)(\ln x+1) - x\ln x}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{\ln x + 1 + x\ln x + x - x\ln x}{(1+x)^2} = \frac{\ln x + 1 + x}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{g(x)}{(1+x)^2}$$

Donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x)^2}}$ $\forall x > 0$

Pour $x < 0$, $f'(x) = e^{-2x}(10 - 12x)$

$e^{-2x} > 0$ alors le signe de $f'(x)$ dépend de $10 - 12x$

Posons $10 - 12x = 0 \Leftrightarrow 12x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{10}{12}$

$\Leftrightarrow x = \frac{5}{6}$

$10 - 12x > 0 \Leftrightarrow -12x > -10 \Leftrightarrow x < \frac{-10}{-12}$

$\Leftrightarrow x < \frac{5}{6}$

$10 - 12x < 0 \Leftrightarrow -12x < -10 \Leftrightarrow x > \frac{-10}{-12}$

$\Leftrightarrow x > \frac{5}{6}$

Comme $10 - 12x > 0$ $\forall x < \frac{5}{6}$, alors $10 - 12x > 0$ $\forall x \leq 0$ car $]-\infty, 0] \subset ]-\infty, \frac{5}{6}[$

Puisque le signe de $f'(x)$ dépend de $10 - 12x$ on en déduit que $f'(x) > 0$ $\forall x \in ]-\infty, 0]$ alors $f$ est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$

Pour $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)^2}$ (15)

Comme $(1+x)^2 > 0 \ \forall x > 0$

alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$

D'après ce qui précède $g(x) \leqslant 0$ sur $]0, \alpha]$

alors $f'(x) \leqslant 0$ sur $]0, \alpha]$ et donc $f$ est décroissante sur $]0, \alpha]$

$g(x) \geqslant 0$ sur $[\alpha, +\infty[$, alors ~~est croissante~~

$f'(x) \geqslant 0$ sur $[\alpha, +\infty[$ et donc $f$ est croissante sur $[\alpha, +\infty[$

6°) Montrons que $f(\alpha) = -\alpha$ et déterminons le point d'intersection de $(\mathscr{C}f)$ avec l'axe des abscisse $(0, x)$.

$$f(\alpha) = \frac{\alpha \ln \alpha}{1+\alpha}$$

Comme $g(\alpha) = 0$ alors on a $1 + \alpha + \ln(\alpha) = 0$