Exercice 1

Déterminer le domaine de définition des fonction suivantes

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x-10}}{x-7} \quad , \quad f(x) = \frac{\sqrt{|2x-10|}}{x-7}$$

$$f(x) = \frac{4x-1}{\sqrt{5-2x}} \quad , \quad f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{x+4}}$$

$$f(x) = \frac{3x+2}{x^2-11x+18}$$

$$f(x) = \frac{4x+7}{|x+2|+1} \quad , \quad f(x) = \sqrt{x^2-2}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\[2ex] \dfrac{1}{4} & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + \sin x}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

Exercice 2

La fonction $x \longmapsto f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{1 - x}$ est-elle prolongeable par continuité en 1 ?

La fonction $x \longmapsto f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Determiner le domaine de définition des fonctions suivantes

$$f(x) = \begin{cases} (1-x)x^2, & \text{si } x \leq 1 \\ \sqrt{x^2 + 2x - 3} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1 - x^2}{x - 2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1 Correction de la série

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x-10}}{x-7}$$

$f(x)$ existe $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-10 \geq 0 \\ x-7 \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 10 \\ x \neq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{10}{2} \\ x \neq 7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x \neq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [5, +\infty[\\ x \neq 7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in [5, +\infty[\setminus \{7\}$

Donc $\boxed{D_f = [5, +\infty[\setminus \{7\}}$

2

$$f(x)=\frac{\sqrt{|2x-10|}}{x-7}$$

$f(x)$ existe $\Leftrightarrow \begin{cases} |2x-10|\geq 0 \\ x-7\neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ x\neq 7 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\setminus\{7\}$

Donc $\boxed{D_f=\mathbb{R}\setminus\{7\}}$

$$f(x)=\frac{4x-1}{\sqrt{5-2x}}$$

$f(x)$ existe $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5-2x}\neq 0 \\ 5-2x\geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5-2x\neq 0 \\ -2x\geq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x\neq -5 \\ x\leq \frac{5}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{5}{2} \\ x \leq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{5}{2} \\ x \in \left]-\infty, \frac{5}{2}\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left]-\infty, \frac{5}{2}\right[$$

Donc $\boxed{Df = \left]-\infty, \frac{5}{2}\right[}$

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{x+4}}$$

$f(x)$ existe $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x-1}{x+4} \geq 0 \\ x+4 \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x-1}{x+4} \geq 0 \\ x \neq -4 \end{cases}$$

Résolvons l'inéquation $\frac{3x-1}{x+4} \geq 0$ (4)

Posons $3x - 1 = 0$

et $x + 4 \neq 0$

Alors $3x = 1$ et $x \neq -4$

$x = \frac{1}{3}$ et $x \neq -4$

x	$-\infty$	-4		$1/3$	$+\infty$
$3x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+4$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{3x-1}{x+4}$	$+$	||	$-$		$+$

Donc $\frac{3x-1}{x+4} \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -4\right[\cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$

Dès lors

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{x+4} \geq 0 \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left]-\infty, -4\right[\cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right[\\ x \neq -4 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -4[\cup [\frac{1}{3}, +\infty[$

Donc $\boxed{D_f =]-\infty, -4[\cup [\frac{1}{3}, +\infty[}$

$$f(x) = \frac{4x+7}{x^2 - 11x + 18}$$

$f(x)$ existe $\Leftrightarrow x^2 - 11x + 18 \neq 0$

$\Delta = (-11)^2 - 4(1)(18) = 49$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$

$$x_1 = \frac{11-7}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{11+7}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

Alors $x^2 - 11x + 18 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ et $x \neq 9$

Donc $\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{2 ; 9\}}$

(6)

$$f(x) = \frac{4x+7}{|x+2|-1}$$

$f(x)$ existe $\Leftrightarrow |x+2| - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow |x+2| \neq 1$

$\Leftrightarrow x+2 \neq 1$ et $x+2 \neq -1$

$\Leftrightarrow x \neq 1-2$ et $x \neq -1-2$

$\Leftrightarrow x \neq -1$ et $x \neq -3$

Donc $\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, -1\}}$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2}$$

$f(x)$ existe $\Leftrightarrow x^2 - 2 \geq 0$

Posons $x^2 - 2 = 0$

Alors $x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{2})^2 = 0$

$(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$

$\Leftrightarrow x-\sqrt{2}=0$ ou $x+\sqrt{2}=0$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Alors $x^2-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2},+\infty[$

Donc $\boxed{D_f =]-\infty,-\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2},+\infty[}$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x=2 \end{cases}$$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

existe $\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-2, +\infty[\\ x \neq 2 \end{cases}$

8

$\Leftrightarrow x \in [-2, +\infty[\setminus \{2\}$

Donc $D_f = [-2, +\infty[\setminus \{2\} \cup \{2\}$

$\Rightarrow \boxed{D_f = [-2, +\infty[}$

$f(x) = \dfrac{x^2 + \sin x}{\sqrt{x^2 - 4}}$ existe

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - 4} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x^2 - 4 \neq 0 \end{cases}$

Posons $x^2-4=0$

Alors $x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2-2^2=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0$

$\Leftrightarrow x-2=0$ ou $x+2=0$

$\Leftrightarrow x=2$ ou $x=-2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

Alors $x^2-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$

$x^2-4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ et $x \neq -2$

D'où $\begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ x^2-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[\\ x \neq 2 \text{ et } x \neq -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$

Donc $\boxed{D_f =]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[}$

Exercice 2

$f(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{1-x}$ est-elle prolongeable par continuité en 1.

La fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin(\pi x)}{1-x}$ existe

$\Leftrightarrow 1 - x \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 1$

Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Vérifions alors si f admet une limite en 1

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \left[\frac{\sin(\pi x)}{1-x} \right]$$

$$= \frac{\sin \pi}{1-1} = \frac{0}{0} \quad \text{"FI"}$$

Levons l'indétermination

11

Posons $h(x) = \sin(\pi x)$

$h(1) = \sin \pi = 0$

$h'(x) = \pi \cos(\pi x)$, $h'(1) = \pi \cos(\pi)$

$= -\pi$

$$\frac{\sin(\pi x)}{1-x} = -\left(\frac{\sin(\pi x)}{x-1}\right)$$

$$= -\left(\frac{\sin(\pi x) - 0}{x-1}\right)$$

$$= -\left(\frac{h(x) - h(1)}{x-1}\right)$$

Alors $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{\sin(\pi x)}{1-x}\right) = \lim\limits_{x \to 1} -\left(\frac{h(x)-h(1)}{x-1}\right)$

$$= -\lim_{x \to 1} \frac{h(x) - h(1)}{x-1} = -h'(1)$$

$= -(-\pi) = \pi$

D'où $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{\sin(\pi x)}{1-x} \right) = \pi \in \mathbb{R}$

Donc f admet une limite finie en 1

Donc elle est prolongeable par continuité en 1

La fonction $x \longmapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Vérifions alors est-ce qu'elle admet une limite en 0

$\lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = ?$

Posons $X = \frac{1}{x}$, alors $x = \frac{1}{X}$

Si $x \to 0 \Rightarrow X \to \pm\infty$

Alors $\lim\limits_{x \to 0} \left[x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \lim\limits_{X \to \pm\infty} \left(\frac{1}{X} \sin X\right)$

$= \lim\limits_{X \to \pm\infty} \left(\frac{\sin X}{X}\right) = ?$

On a $-1 \leq \sin X \leq 1$, alors

$\frac{-1}{X} \leq \frac{\sin X}{X} \leq \frac{1}{X}$

Comme $\lim\limits_{X \to \pm\infty} \left(\frac{-1}{X}\right) = 0$ et $\lim\limits_{X \to \pm\infty} \left(\frac{1}{X}\right) = 0$

alors d'après le théorème des gendarmes on a $\lim\limits_{X \to \pm\infty} \left(\frac{\sin X}{X}\right) = 0$

On en déduit que $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ (14)

Donc $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est prolongeable par continuité en 0.

Déterminons le domaine de définition de chacune des fonctions suivante

$$f(x) = \begin{cases} (1-x)x^2, & \text{si } x \leq 1 \\ \sqrt{x^2+2x-3} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Posons $f_1(x) = (1-x)x^2 \quad$ si $x \leq 1$

$$f_1(x) \text{ existe} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \in]-\infty, 1] \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \cap]-\infty, 1]$

$\Leftrightarrow x \ ]-\infty, 1]$

Alors $Df_1 =]-\infty, 1]$

Posons $f_2(x) = \sqrt{x^2+2x-3}$ si $x > 1$

$f_2(x)$ existe $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-3 \geq 0 \\ x > 1 \end{cases}$

Posons $x^2+2x-3=0$

$\Delta = (2)^2 - 4(1)(-3) = 4+12 = 16$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$

$x_1 = \dfrac{-2-4}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3$

$x_2 = \dfrac{-2+4}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

16

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
x^2+2x-3	$+$	0	$-$	0	$+$

Alors $x^2+2x-3 \geq 0$ $x \in]-\infty,-3] \cup [1,+\infty[$

D'ou $\begin{cases} x^2+2x-3 \geq 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty,-3] \cup [1,+\infty[\\ x \in]1,+\infty[\end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in \left(]-\infty,-3] \cup [1,+\infty[\right) \cap \left(]1,+\infty[\right)$

$\Leftrightarrow x \in]1,+\infty[$

Alors $D_{f_2} =]1,+\infty[$

$D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2}$

$=]-\infty,1] \cup]1,+\infty[=]-\infty,+\infty[$

$= \mathbb{R}$. Donc $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

17

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1-x^2}{x-2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Posons $f_1(x) = (x-1)^2$ si $x < 0$

$f_1(x)$ existe $\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \in]-\infty, 0[\end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \cap]-\infty, 0[=]-\infty, 0[$

Alors $Df_1 =]-\infty, 0[$

Posons $f_2(x) = \dfrac{1-x^2}{x-2}$ si $x \geq 0$

$f_2(x)$ existe $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \neq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \in [0, +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow x \in [0, +\infty[\setminus \{2\}$

18

$\Leftrightarrow x \in [0, 2[\cup]2, +\infty[$

Donc $D_{f_2} = [0, +\infty[\setminus \{2\}$

Alors $D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2}$

$=]-\infty, 0[\cup [0, +\infty[\setminus \{2\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Donc $\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}}$